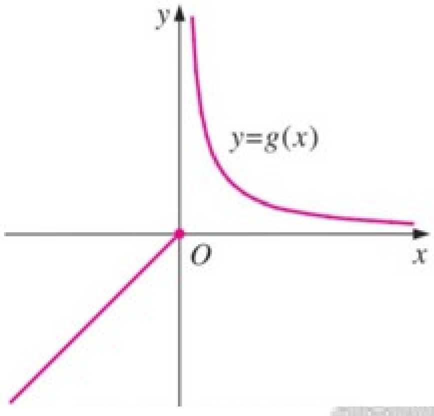
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2018 (11/6/2018)

ΘΕΜΑ Α:

Α1. σελ. 99 (σχολικό)

Α2. α) ψευδής β) η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x \ , & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} \ , & x>0 \end{cases}$ **είναι '1-1' αλλά όχι γνησίως μονότονη.**



Α3. σελ. 216 (σχολικό) **Α4. (ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ)** α)**ΛΑΘΟΣ**
β)**ΛΑΘΟΣ**
γ)**ΣΩΣΤΟ**
δ)**ΣΩΣΤΟ**
ε)**ΣΩΣΤΟ**

ΘΕΜΑ Β:

Β1. $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}$ οπότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{8}{x^3}=0 \Leftrightarrow 1=-\dfrac{8}{x^3} \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$

Με δοκιμή τιμών ή με λύση ανίσωσης προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

X	-∞		-2		0		+∞
f '(x)		+	0	−	||	+	
f (x)		↗		↘		↗	

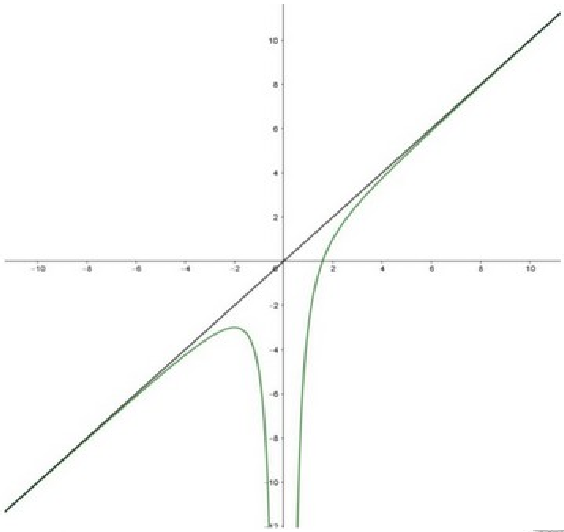
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και στο $(0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$ παρουσιάζει για x=-2 τοπικό μέγιστο με τιμή f(-2)=-3

Β2. $f''(x)=-24\cdot\dfrac{1}{x^4}<0$ για κάθε $x\neq 0$ 'Αρα η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Β3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ Άρα η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=0$ Άρα η ευθεία y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞ και στο -∞.

Β4. Επιπλέον η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $A(\sqrt[3]{4},0)$ και έχει τη μορφή:



ΘΕΜΑ Γ:

Γ1. Το μήκος x είναι η περίμετρος του τετραγώνου άρα το τετράγωνο θα έχει πλευρά x/4 οπότε:

$$E_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$$

Η περιφέρεια του κύκλου είναι $8-x=2\pi\rho$ (όπου ρ η ακτίνα του κύκλου) άρα $\rho=\dfrac{8-x}{2\pi}$ οπότε:

$$E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}=\pi\cdot\rho^2=\pi\cdot\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

Τελικά $E(X)=E_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}+E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(8-x)^2}{4\pi}=\dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$ όπου 0<x<8 αφού το x είναι μήκος και δεν μπορεί να ξεπεράσει την τιμή 8 που είναι το μήκος του σύρματος.

Γ2. $E'(x)=\dfrac{(\pi+4)x-32}{16\pi}$ οπότε $E'(x)=0\Leftrightarrow(\pi+4)x-32=0\Leftrightarrow x=\dfrac{32}{\pi+4}$ οπότε ισχύει ο πίνακας :

X	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
E'(x)	‖	−	0	+	‖
E (x)		↘		↗	

Άρα η συνάρτηση E(x) παρουσιάζει ακρότατο στο x=32/(π+4) το οποίο είναι η λύση της εξίσωσης $\dfrac{x}{4}=2\dfrac{8-x}{2\pi}$ δηλαδή όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση E(x)=5 έχει μία ακριβώς λύση στο (0,8) με την βοήθεια του συνόλου τιμών της E(x).

Η E(x) συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$, άρα το σύνολο τιμών είναι :

E(A1) = $\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to0^+}E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},\dfrac{16}{\pi}\right)$

Η E(x) συνεχής και γνησίως αυξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$, άρα το σύνολο τιμών είναι :

E(A2) = $\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to8^-}E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},4\right)$

Άρα το 5 ανήκει μόνο στο E(A1) και για κάποιο $x_0 \in (0, \frac{32}{\pi+4})$ ισχύει $E(x_0)=5$, επιπλέον το x_0 μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \frac{32}{\pi+4}]$

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1. $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$ οπότε $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$ άρα $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2=0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1 \Leftrightarrow x=\alpha$

και $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2>0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}>1 \Leftrightarrow x>\alpha$ οπότε προκύπτει ο πίνακας κυρτότητας :

X	-∞		α		+∞
f ''(x)		—	0	+	
f (x)		∩		∪	

΄Αρα στο x=α η Cf παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το Α(α, 2-2α).

Δ2. Η f '(x) παρουσιάζει στο x=α (ολικό) ελάχιστο με f '(α)=2(1-α)<0 (αφού α>1)
Ο πίνακας μονοτονίας της f ' (x) που προκύπτει είναι:

X	-∞		α		+∞
f ''(x)		—	0	+	
f '(x)		↘		↗	

Θα εξετάσω το σύνολο τιμών της f '(x) και θα αποδείξω ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές για τις οποίες η f '(x) γίνεται 0.

Η f ' (x) συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$, άρα το σύνολο τιμών είναι :
f ' (A1) = $[\lim_{x\to-\infty} f'(x), f'(\alpha)) = [2(1-\alpha), +\infty)$
Η f ' (x) συνεχής και γνησίως αυξουσα στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$, άρα το σύνολο τιμών είναι :
f ' (A2) = $[f'(\alpha), \lim_{x\to+\infty} f'(x)) = [2(1-\alpha), +\infty)$
Το 0 ανήκει και στα δύο σύνολα τιμών και έστω:
x_1, x_2 με $f'(x_1)=0$ για $x_1 \in (-\infty, \alpha)$ και $f'(x_2)=0$ για $x_2 \in (\alpha, +\infty)$
Τα x_1, x_2 μοναδικά λόγω της μονοτονίας της f ' και στα δύο διαστήματα.
Επίσης ισχύουν:
Για $x<x_1 \Leftrightarrow f'(x)>f'(x_1)=0$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$
Για $x_1<x<\alpha \Leftrightarrow f'(x)<f'(x_1)=0$ οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, \alpha]$
Για $\alpha<x<x_2 \Leftrightarrow f'(x)<f'(x_2)=0$ οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_2]$
Για $x>x_2 \Leftrightarrow f'(x)>f'(x_2)=0$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $[x_2, -\infty,)$

οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίκακας μονοτονίας για την f όπου φαίνεται ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2

X	-∞		x_1		x_2		+∞
f '(x)		+	0	—	0	+	
f (x)		↗		↘		↗	

Δ3. Έστω $x_0 \in (\alpha, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=f(1)$

τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α, x_2) θα ισχύει :
$\alpha < x_0 < x_2 \Leftrightarrow f(\alpha) > f(x_0) > f(x_2) \Leftrightarrow f(\alpha) > f(1) > f(x_2) \Leftrightarrow \alpha < 1 < x_2$ άτοπο αφού α>1
'Αρα η εξίσωση f(x)=f(1) είναι αδύνατη στο (α, x_2) .

Δ4. Για α=2 η συνάρτηση γίνεται $f(x)=2e^{x-2}-x^2$

Από το Δ1 ερώτημα η συνάρτηση είναι κυρτή στο [2, 3] και η γραφική της παράσταση έχει εφαπτομένη στο σημείο Α(2, f(2)) την εξίσωση : $y-f(2)=f'(2)(x-2)$ και αφού f(2)=-2 και f '(2)=-2 η εξίσωη της εγαπτομένης γίνεται :y=-2x+2

Οπότε θα ισχύει στο [2,3]: $f(x) \geq -2x+2 \Leftrightarrow f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$

(το = ισχύει μόνο για x=2)
οπότε αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$

α' μέθοδος (Αντικατάσταση)

$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$ θέτω $\sqrt{x-2}=u$ άρα $x=u^2+2$ και $dx=2udu$
για x=2 το u=0
για x=3 το u=1 οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx=\int_0^1 [-2(u^2+2)+2]u2udu=\int_0^1 (-2u^2-2)\,2u^{2du}=2\int_0^1 (-2u^4-2u^2)\,du=-4\left[\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{-32}{15}$$

β' μέθοδος (Κατά παράγοντες)

$$\int_2^3 (-2x+2)\left((x-2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\right)'dx=\left[\left((-2x+2)(x-2)^{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}\right)\right]_2^3-\int_2^3 -2\cdot\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}dx=-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\left[(x-2)^{\frac{5}{2}}\frac{5}{2}\right]_2^3=-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}=-\frac{32}{15}$$

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$.