# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2019

## ΘΕΜΑ Α:

**Α1.** Απόδειξη σελ.144 (σχολικό)

**Α2.** Ορισμός σελ. 185 (σχολικό)

**Α3.** Θεώρημα σελ. 128 (σχολικό)

**Α4.** **(ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ)** α)**ΣΩΣΤΟ** β)**ΛΑΘΟΣ** γ) **ΣΩΣΤΟ** **δ)ΣΩΣΤΟ** **ε) ΣΩΣΤΟ**

## ΘΕΜΑ Β:

**Β1.** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g\circ f$ είναι :
$A=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\geq 2\}=\{x\in\mathbb{R}/x^2\geq 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Ο τύπος της συνάρτησης είναι : $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}$

**Β2.** Έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(g\circ f)(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=1=\lambda\in\mathbb{R}$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0=\beta\in\mathbb{R}$ Άρα η ασύμπτωτη είναι η ευθεία y=x.

**Β3.**

Ισχύει : $\lim\limits_{x\to 2^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=+\infty$

Άρα δεν υπάρχει το όριοτης h(x) στο $x_0=2$ .

**Β4.**

Ισχύει : $\varphi(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, & x\leq -1\\ 1-x^2, & -1<x<1\\ \sqrt{x^2-1}, & x\geq 1\end{cases}$

--- $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)=0=\varphi(1)$ Άρα η φ(x) είναι συνεχής στο [0,2].

--- $$\lim_{x\to 1^+}\frac{t(x)-t(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{t(x)-t(1)}{x-1}\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}\cdot\eta\mu(\pi x)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x^2)\cdot\eta\mu(\pi x)-0}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2-1}\cdot\eta\mu(\pi-\pi x)}{\pi-\pi x}\cdot(-\pi)=\lim_{x\to 1^+}(-x-1)\cdot\eta\mu(\pi x)\Leftrightarrow 0=0$$

Επομένως η τ(x) είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα και συνεχής.

Άρα η t(x) αφού είναι συνεχής στο $[0,1)$ και στο $(1, 2]$ ως πράξεις και σύνθεση μεταξύ συνεχών συναρτήσεων είναι τελικά συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\ 0, 2\ ]$.

Επίσης είναι αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1\ )$και στο $(1,\ 2\ )$ως πράξεις και σύνθεση μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι τελικά παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(0, 2\ )$.

Επιπλέον, $t(0)=\varphi(0)\eta\mu 0=0$ και $t(1)=\varphi(1)\eta\mu 2\pi=0$ άρα $t(0)=t(1)=0$ .

Άρα πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\ 0, 2\ ]$.

## ΘΕΜΑ Γ:

**Γ1.** $2f(x)f'(x)=1 \Leftrightarrow (f^2(x))'=1 \Leftrightarrow f^2(x)=x+c$ από τη συνέπεια του Θ.Μ.Τ. αφού οι συναρτήσεις f και x είναι συνεχείς για x>0.

Για x=1 έχουμε f(1)=1+c άρα c=0 οπότε $f^2(x)=x$ για κάθε $x>o$,και επειδή $f(x)\neq 0$ για $x>o$

θα ισχύει : $f(x)=\sqrt{x}$ ή $f(x)=-\sqrt{x}$ . Όμως f(1)=1>0 άρα $f(x)=\sqrt{x}$ για $x>0$ .

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty\ )$ και $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ η $f(x)=\sqrt{x}$ για $x\geq 0$

**Γ2.** Έστω $M(x,\sqrt{x})$ σημείο της γραφικής παράστασης της f και d η απόστασή του από το σημείο Α(3/2,0),

τότε θα ισχύει:

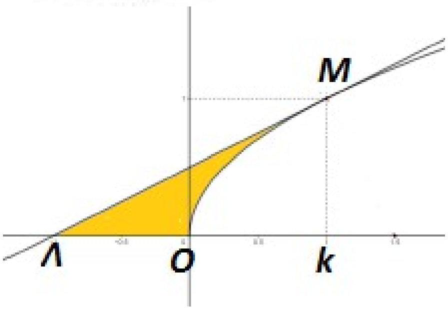
$$d(M,A)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2} \Leftrightarrow d(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+x} \Leftrightarrow d'(x)=\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)+1}{2\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+x}}=0$$

Άρα $2x-3+1=0 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$ οπότε ισχύει ο πίνακας:

| X | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| d'(x) | | − | 0 | + | |
| d(x) | | ↘ | | ↗ | |

Η συνάρτηση d παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 άρα το σημείο Μ(1,1) απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Α και είναι μοναδικό διότι d'(x)=0 μόνο για x=1.

**Γ3.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο Μ(1,1) είναι η $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ που τέμνει τον άξονα xx′ στο σημείο $(-1, 0)$ .



Άρα **E = E**μ(ΚΛΜ) – **E**μ(ΜΟΚ) = $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1-\int_0^1 \sqrt{x}dx=1-[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}]_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ τ.μ.

**Γ4**

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow \varphi(x)=0$ με $\varphi(x)=f(x)-g(x)$

Εφαρμόζουμε θεώρημα BOLZANO στη συνάρτηση φ στο διάστημα [0,1].

- Η φ συνεχής στο [0,1] ως διαφορά συνεχών.
- $\varphi(0) = -g(0)<0$ και $\varphi(1)=1-g(1)>0$ άρα $\varphi(0)\varphi(1)<0$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$ .

Επιπλέον : για $x_1<x_2\Leftrightarrow\sqrt{(x_1)}<\sqrt{(x_2)}$

για $x_1<x_2\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow -g(x_1)<-g(x_2)$

Άρα $\sqrt{x_1}-g(x_1)<\sqrt{x_2}-g(x_2)\Leftrightarrow\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ οπότε η φ(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1), άρα και το $x_0$ μοναδική ρίζα.

## ΘΕΜΑ Δ:

**Δ1.**

$$f'(x)=\frac{3x^2(3x^2-3x+1)-x^3(6x-3)}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}\geq 0 \text{ άρα f γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}$$

αφού η f μηδενίζεται στο 0 και στο 1, όμως είναι συνεχής σε αυτά τα σημεία.

**Δ2.**

$$f(x)+f(1-x)=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}+\frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2-3(1-x)+1}=\frac{x^3+(1-x)^3}{3x^2-3x+1}=\frac{x^3+1-3x+3x^2-x^3}{3x^2-3x+1}=1$$

Για $x\geq 0$ η f γνησίως αύξουσα άρα $f(x)\geq f(0)=0$ οποτε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^1 f(x)dx$ .

Επειδή η f είναι συνεχής, ολοκληρώνουμε τη σχέση f(x) + f(1-x)=1 με όρια ολοκλήρωσης 0 και 1 και έχουμε:

$\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=1$ θέτω 1- x= u άρα du=-dx και για x=0 το u=1, για x=1 το u=0. Οπότε η σχέση γίνεται:

$$\int_0^1 f(x)dx-\int_1^0 f(u)du=1\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx=1\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow E=\frac{1}{2}$$

**Δ3.** Για $x\le 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)\le f(1)=1 \Leftrightarrow f^2(x)\le f(x)$ και επειδή η f συνεχής ολοκληρώνω την ανίσωση και επείδη το = δεν ισχύει παντού, έχω

$$\int_0^1 f^2(x)dx<\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^1 2f^2(x)dx<1$$

**Δ4.**

$f(\eta\mu^2x)+f(\sigma\upsilon\nu^2x)=f(\eta\mu^2x)+f(1-\eta\mu^2x)=f(u)+f(1-u)=1$ αν θέσουμε $\eta\mu^2x=u$

Άρα $f(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x})=1=f(1)\overset{f\ '1-1'}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi x\cdot\frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{e^{\eta\mu x}}=1\Leftrightarrow\frac{e^{\eta\mu x}}{\eta\mu x}=\frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x}$ (1)

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=\frac{e^x}{x}$ με $x\in(0,1)$ διότι, $0<\eta\mu x<1$ και $0<\sigma\upsilon\nu x<1$ αφού, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$h'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}<0$ για $x\in(0,1)$ άρα h γνησίως φθίνουσα άρα και '1−1'

Οπότε η σχέση (1) γίνεται: $h(\eta\mu x)=h(\sigma\upsilon\nu x)\overset{h\ '1-1'}{\Leftrightarrow}\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ για τα $x\in(0,\frac{\pi}{2})$