ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2020 (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Απόδειξη σελ.111 (σχολικό)

Α2. Ορισμός σελ. 140 (σχολικό)

Α3. Θεώρημα σελ. 128 (σχολικό)

Α4. (ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ) α) **ΛΑΘΟΣ** β)**ΛΑΘΟΣ** γ) **ΛΑΘΟΣ** **δ) ΛΑΘΟΣ** **ε) ΣΩΣΤΟ**

ΘΕΜΑ Β:

Β1. $f(g(x))=x^2-2x \Leftrightarrow (x+\beta)^2+\alpha=x^2-2x \Leftrightarrow x^2+2\beta x+\beta^2+\alpha=x^2-2x \Leftrightarrow 2\beta x+\beta^2+\alpha=-2x \Leftrightarrow$

Άρα $2\beta=-2$ και $\beta^2+\alpha=0$, οπότε $\beta=-1$ και $\alpha=-1$. Άρα $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=x-1$

Β2.

- f(2)=3=f(-2) άρα η f δεν είναι "1-1".
- $g(x_1)=g(x_2) \Leftrightarrow x_1-1=x_2-2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η g(x) είναι "1-1".

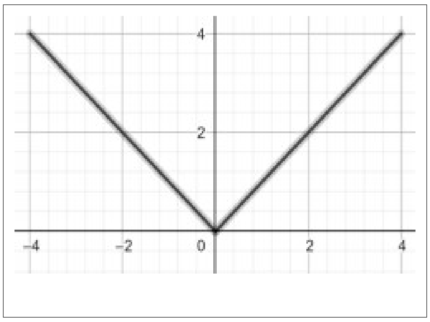
Για να βρούμε την αντίστροφη της g θέτουμε όπου g(x) το y και λύνουμε ως προς x

$y=x-1 \Leftrightarrow x=y+1 \quad y\in\mathbb{R}$ Άρα η αντίστροφη της g(x) είναι : $g^{-1}(x)=x+1 \ , \ x\in\mathbb{R}$

Β3.

Το πεδίο ορισμού της $g^{-1}\circ f$ είναι το $A'=\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$
και ο τύπος της είναι : $(g^{-1}\circ f)(x)=f(x)+1=x^2$

Άρα $\varphi(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases}-x, & x\leq 0\\ x, & x>0\end{cases}$ με γραφική παράσταση:



Β4.

i) Ισχύει : $x^2+1\leq h(x)\leq x+1$

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$ Άρα $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=2$ από το Κριτήριο Παρεμβολής.

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{u+7}-3}{u^2-4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{u+7-9}{(u-2)(u+2)(\sqrt{u+7}+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(u+2)(\sqrt{u+7}+3)}=\dfrac{1}{4\cdot 6}=\dfrac{1}{24}$

θέτω h(x)=u οπότε το u τείνει στο 2

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1. $N(-2,f(-2)) \Leftrightarrow N(-2,-8)$

Έστω $(x_{0,}f(x_0))$ το σημείο επαφής και $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης.

θα ισχύει : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(x_0)^3=3(x_0)^2(x-x_0) \Leftrightarrow -8-(x_0)^3=3(x_0)^2(-2-x_0)$

$\Leftrightarrow 2(x_0)^3+6(x_0)^2-8=0 \Leftrightarrow (x_0)^3+3(x_0)^2-4=0 \Leftrightarrow (x_0-1)(x_0+2)^2=0$ άρα $x_0=1$ και $x_0=-2$ (διπλή ρίζα)
Τα σημεία επαφής είναι (1,1) και (-2,-8) και οι εξισώσεις των εφαπτομένων y=3x-2 και y = 12x +16.

Γ2. Η ευθεία (ζ) που είναι παράλληλη στην ευθεία ε : y= 3x- 2 και διέρχεται από το σημείο M (0,α) έχει εξίσωση: ζ : y=3x+α, $\alpha \in (\ 2,2\ )$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση f(x)=3x+α έχει ακριβώς μία λύση στο (-1,1).

Άρα έχουμε: $x^3=3x+\alpha \Leftrightarrow x^3-3x-9=0$ θεωρώ $\varphi(x)=x^3-3x-9$ και θα κάνω θεώρημα BOLZANO στο

[-1,1].

- φ συνεχής στο [-1,1]
- φ(1)=α-2<0
  φ(-1)=2-α>0 άρα φ(1)φ(-1)<0

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$ και μάλιστα το x_0 ειναι μοναδικό διότι :
$\varphi'(x)=(x^3-3x-9)'=3x^2-3=3(x^2-1)<0$ στο $(-1,1)$ άρα η φ γνησίως φθίνουσα στο (-1,1).

Γ3. Ισχύει $y(t)=x^3(t) \Leftrightarrow y'(t)=3x^2(t)x'(t)$

Έστω $(x_{1,}y_1)$το σημείο της καμπύλης ώστε $y'(t_1)=3x'(t_1)$

Άρα $3x'(t_1)=3x^2(t_1)x'(t_1) \Leftrightarrow 1=x^2(t_1) \Leftrightarrow x(t_1)=-1$ ή $x(t_1)=1$ (απορρίπτεται γιατί $x \in (-2,0)$)

Άρα το σημείο της καμπύλης είναι (-1,-1).

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1.
Παρατηρούμε ότι : $f(x)\sigma\upsilon\nu^3 x+f'(x)\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu x=1 \Leftrightarrow f(x)\sigma\upsilon\nu x+f'(x)\eta\mu x=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Άρα $g'(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu x+f'(x)\eta\mu x-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=0$ οπότε g(x)=c με g(π/3)=1 άρα g(x)=1 οπότε:

$$f(x)\eta\mu x-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1 \Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{\eta\mu x}$$

Δ2.

Ισχύει : $f'(x)=\frac{-συνx}{ημ^2x}+\frac{ημx}{συν^2x}=\frac{ημ^3x-συν^3x}{ημ^2xσυν^2x}$ οπότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow ημ^3x=συν^3x \Leftrightarrow ημx=συνx \Leftrightarrow x=\frac{π}{4}$

οπότε ισχύει ο πίνακας:

Χ	0	π/4	π/2
f '(x)	−	0	+
f(x)	↘		↗

Η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο π/4 το $f(\frac{π}{4})=2\sqrt{2}$

Δ3.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (0,π/4]

άρα f(x) ϵ [f(π/4) , $\lim_{x\to 0^+} f(x)$) =[$2\sqrt{2}$, $+\infty$)

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [π/4 , $+\infty$)

άρα f(x) ϵ [f(π/4) , $\lim_{x\to +\infty} f(x)$) =[$2\sqrt{2}$, $+\infty$)

Το $3\sqrt{2}$ ϵ [$2\sqrt{2}$, $+\infty$) άρα υπάρχουν ακριβώς δύο $ρ_1$ και $ρ_2$ με $ρ_1<\frac{π}{4}<ρ_2$ τέτοια ώστε

$f(ρ_1)=f(ρ_2)=3\sqrt{2}$

Δ4.

Εφαρμόζουμε θεώρημα Μέσης Τιμής στη συνάρτηση f στο διάστημα [$\frac{π}{4}, ρ_2$].

- Η f συνεχής στο [$\frac{π}{4}, ρ_2$].
- Η f παραγωγίσιμη στο ($\frac{π}{4}, ρ_2$).

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ\in(\frac{π}{4}, ρ_2)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ)=\frac{f(ρ_2)-f(\frac{π}{4})}{ρ_2-\frac{π}{4}}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{\frac{4ρ_2-π}{4}}=\frac{4\sqrt{2}}{4ρ_2-π}$.

Όμως $f''(x)=-\frac{-ημx\,ημ^2x-συνx\,2\,ημx\,συνx}{ημ^4x}+\frac{συνx\,συν^2x-2συνx(-ημx)ημx}{συν^4x}$ =

= $f''(x)=\frac{ημ^2x+2συν^2x}{ημ^3x}+\frac{συν^2x+2ημ^2x}{συν^3x}=\frac{1+συν^2x}{ημ^3x}+\frac{1+ημ^2x}{συν^3x}>0$

Άρα η f '(x) είναι γνησίως αύξουσα οπότε για:

$$\xi<\rho_2 \Leftrightarrow f'(\xi)<f'(\rho_2) \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{2}}{4\rho_2-\pi}<f'(\rho_2) \Leftrightarrow 4\sqrt{2}<f'(\rho_2)\cdot 4\rho_2-\pi \quad \text{διότι} \quad 4\rho_2-\pi>0 \quad \text{αφού} \quad \rho_2>\pi/4 \; .$$