ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2020
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Απόδειξη σελ.144 (σχολικό)

Α2. Ορισμός σελ. 51 (σχολικό)

Α3. Ορισμός σελ. 161 (σχολικό)

Α4. α) ΨΕΥΔΗΣ β) $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο R και $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2\geq 0$ στο $\mathbb{R}$

Α5 (ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ) α)**ΛΑΘΟΣ** β) **ΣΩΣΤΟ** γ) **ΣΩΣΤΟ** διότι :

Αν $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$

Αν $f(x)\leq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx<0$ άρα η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

ΘΕΜΑ Β:

Β1. $f'(x)=2(x+\alpha)$ όμως $f'(0)=2$ άρα $\alpha=1$

Β2. Έχουμε : $f(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x$ οπότε $f'(x)=2x+2>0$ για $x>-1$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα για $x\geq -1$ οπότε και "1-1"

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [-1, $+\infty$) άρα f(x) ϵ [f(-1) , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$) =[-1, $+\infty$)

Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$ είναι το [-1, $+\infty$) και το σύνολο τιμών το [-1, $+\infty$).

Στην $y=x^2+2x$ θέτω όπου x το y και όπου y το x και έχω:
$x=y^2+2y \Leftrightarrow y^2+2y-x=0$ με $\Delta=4+4x$ οπότε $y=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4x}}{2}=-1\pm\sqrt{1+x}$

Άρα $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1$ διότι $f^{-1}(x)$ ϵ [-1, $+\infty$).

Β3.
Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}\circ g$ είναι: και $A'=\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x^2\geq 0\}=\mathbb{R}$ και

$f^{-1}(g(x))=\sqrt{g(x)+1}-1=\sqrt{x^2}-1=|x|-1$.

Β4.
$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+1}-1+1}{|x|-1}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}=-\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}=-\lim_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=-\infty$$

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1. $y^2=4-x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{4-x^2}$ οπότε: $E=x\cdot 2y=x\,2\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{4x^2-x^4}$ με x ϵ (0,2) διότι, (ΓΒ)<(ΚΓ)=2

Γ2. $E'(x)=\dfrac{8x-4x^3}{\sqrt{4x^2-x^4}}=0 \Leftrightarrow 4x(2-x^2)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

οπότε ισχύει ο πίνακας:

X | 0	$\sqrt{2}$	2
E'(x) |	+ 0	−
E(x)	↗	↘

$x=\sqrt{2} \Leftrightarrow y=\sqrt{2}$ άρα $2y=2\sqrt{2}$ Οι διαστάσεις λοιπόν είναι $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ και το μέγιστο εμβαδόν:

Γ3. Πρέπει να λύσω $E(x)=2\sqrt{3}$ όμως $E(1)=2\sqrt{3}$ και επειδή η E(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (0, $\sqrt{2}$]

το 1 είναι μοναδική ρίζα.

Επίσης $E(\sqrt{3})=2\sqrt{3}$ και επειδή η E(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο [$\sqrt{2}$,2) το $\sqrt{3}$ είναι μοναδική ρίζα.

Γ4

$f'(x)=e^x(E'(x)+E(x)-2\sqrt{3})$

Εφαρμόζουμε θεώρημα BOLZANO στη συνάρτηση f '(x) στο διάστημα [$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$].

- Η f '(x) συνεχής στο [$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$] ως πράξεις συνεχών.
- $f'(\sqrt{2})=e^{\sqrt{2}}(4-2\sqrt{3})>0$ και $f'(\sqrt{3})=e^{\sqrt{3}}(E'(\sqrt{3}))<0$ άρα $f'(\sqrt{2})f'(\sqrt{3})<0$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Άρα το (ξ, f(ξ)) κρίσημο σημείο.

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1.

Για $x\neq 0$ $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$ και επειδή η f συνεχής στο 0 αφού: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

θα ισχύει : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}, & x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]-\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$

Δ2.

Το ολοκλήτωμα γίνεται: $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ και θέτω στο πρώτο ολοκλήρωμα

$x=-u \Leftrightarrow dx=-du$, για $x=-\dfrac{\pi}{2} \to u=\dfrac{\pi}{2}$, για $x=0 \to u=0$

Άρα $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-u)du+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(-x)+f(x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx=0$

Δ3.

$f'(x)=\dfrac{-\eta\mu x\cdot x-\sigma\upsilon\nu x+1}{x^2}$ και θεωρώ $\varphi(x)=-\eta\mu x\cdot x-\sigma\upsilon\nu x+1$ με $\varphi'(x)=-x\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=0$

οπότε ισχύει ο πίνακας:

X	-π/2	0	π/2
φ'(x)	+	0	−
φ(x)	↗		↘

Οπότε $\varphi(x)<-\varphi(0)=0$ άρα $f'(x)<0$ για $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]-\{0\}$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο [- π/2,π/2] διότι η f συνεχής στο 0.

Δ4.

Η εξίσωση $2020\sigma\upsilon\nu x-x=2020$ έχει το x=0 προφανή λύση.

Για $x\neq 0\Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\dfrac{1}{2020}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2020}$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (0, π/2] άρα f(x) ϵ [f(π/2) , $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$) =[-2/π, 0)

Οπότε $f(x)\neq\dfrac{1}{2020}$ άρα δεν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο (0,π/2]

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο [-π/2,0) άρα f(x) ϵ ($\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, f(-π/2)] =(0,2/π]

Οπότε η εξίσωση $f(x)=\dfrac{1}{2020}$ έχει μοναδική ρίζα στο [-π/2,0).

Δ5.

Η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης είναι το 0, άρα F(0)=0.

$F'(x)=f(x)$ ϵ [-2/π, 0) αν x ϵ (0, π/2] άρα F '(x)<0 άρα η F γνησίως φθίνουσα στο [0, π/2]

$F'(x)=f(x)$ ϵ (0,2/π] αν x ϵ [-π/2,0) άρα F '(x)<0 άρα η F γνησίως φθίνουσα στο [-π/2,0]

Για $x>0\overset{F\downarrow}{\Leftrightarrow}F(x)<F(0)=0$ και $x<0\overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow}F(x)<F(0)=0$ άρα $|F(x)|=-F(x)$.

Για $x>0\Leftrightarrow-\pi F(x)\leq 2x\Leftrightarrow 2x+\pi F(x)\geq 0\Leftrightarrow g(x)\geq 0$ και g'(x)=2+πf(x)>0 διότι : $f(x)\geq-\dfrac{2}{\pi}$

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0, π/2] άρα ισχύει το $g(x)\geq g(0)=0$.

Για $x<0\Leftrightarrow-\pi F(x)\leq 2x\Leftrightarrow-2x+\pi F(x)\geq 0\Leftrightarrow h(x)\geq 0$ και h'(x)=-2+πf(x)<0

Οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο [-π/2,0) άρα ισχύει το $h(x)\geq h(0)=0$

Για $x=0 \Leftrightarrow π|F(0)| \leq 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0$ ισχύει

Άρα για $x \in [-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}]$ ισχύει $π\ |F(x)| \leq 2|x|$.