ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2021

ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Απόδειξη σελ.133 (σχολικό)

Α2. Ορισμός σελ. 73 (σχολικό)

Α3. Θεώρημα σελ. 128 (σχολικό)

Α4. (ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ) α) **ΛΑΘΟΣ** β) **ΣΩΣΤΟ** γ) **ΣΩΣΤΟ** **δ) ΛΑΘΟΣ** **ε) ΛΑΘΟΣ**

ΘΕΜΑ Β:

Β1. **α' τρόπος**

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2}>0$ Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα οπότε η f είναι "1-1" άρα αντιστρέφεται.

β' τρόπος

για κάθε $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1}>-\sqrt{x_2} \Leftrightarrow 1-\sqrt{x_1}>1-\sqrt{x_2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-\sqrt{x_1}}>\dfrac{1}{1-\sqrt{x_2}} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα οπότε η f είναι "1-1" άρα αντιστρέφεται.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ άρα το σύνολο τιμών της f που είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι:

$f(A)=D_{f^{-1}}=(\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x))\lim\limits_{x\to+\infty} f(x))=(-\infty,0)$

Ο τύπος της αντίστροφης είναι :

α' τρόπος

Θέτουμε στην f όπου x το $f^{-1}(x)$ και έχουμε: $f(f^{-1})(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{f^{-1}(x)}} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{1-\sqrt{f^{-1}(x)}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{f^{-1}(x)}=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{f^{-1}(x)}=1-\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$

β' τρόπος

Αντικαθιστούμε στην f όπου f(x) το y και θέτουμε όπου x το y και όπου y το x, οπότε έχουμε :

$x=\dfrac{1}{1-\sqrt{y}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{y}=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \sqrt{y}=1-\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow y=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$ Άρα $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$ για x<0

Β2.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g\circ f^{-1}$ είναι :

$A'=\{x\in D_{f^{-1}} / f^{-1}(x)\in D_g\}=\{x\in(-\infty,0)/(\frac{x-1}{x})^2\in[0,+\infty)\}=(-\infty,0)$

Ο τύπος της συνάρτησης $g\circ f^{-1}$ είναι : $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))=\sqrt{f^{-1}(x)}=\sqrt{(\frac{x-1}{x})^2}=\left|\frac{x-1}{x}\right|=\frac{x-1}{x}$ αφού x<0

Άρα $h(x)=\frac{x-1}{x}$ για x<0

Β3.

Κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξουμε στο 0.

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\frac{1}{x})=+\infty$ άρα η ευθεία x=0 (y'y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf

Οριζόντια ασύμπτωτη θα ψάξω στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(1-\frac{1}{x})=1$ άρα η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $-\infty$.

Β4.

Έχουμε : $\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{-h(x)}\cdot ημ\frac{1}{x})$

Έστω $φ(x)=e^{\frac{1-x}{x}}\cdot ημ\frac{1}{x}$ τότε $|φ(x)|=\left|e^{\frac{1-x}{x}}\cdot ημ\frac{1}{x}\right|=e^{\frac{1-x}{x}}\cdot\left|ημ\frac{1}{x}\right|\le e^{\frac{1-x}{x}}$ οπότε : $-e^{\frac{1-x}{x}}\le φ(x)\le e^{\frac{1-x}{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{\frac{1-x}{x}})=\lim\limits_{x\to 0^-}(-e^{\frac{1-x}{x}})=0$ (μορφή $(-e^{+\infty})=0$). Άρα από κριτήριο παρεμβολής:

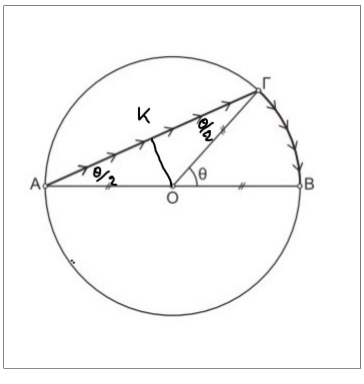
$$\lim_{x\to 0^-}φ(x)=\lim_{x\to 0^-}(e^{-h(x)}\cdot ημ\frac{1}{x})=0$$

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1.

- $ΑΓ=2ΑΚ=2(ΟΓ)συνθ=2συνθ$ όμως $ΑΓ=2t_1$ όπου t_1 ο χρόνος για τη διαδρομή ΑΓ.

Άρα $2συν\frac{θ}{2}=2t_1\Leftrightarrow t_1=συν\frac{θ}{2}$



- $τόξο(ΒΓ)=Rθ=4t_2\Leftrightarrow t_2=\frac{θ}{4}$ όπου t_2 ο χρόνος για τη διαδρομή ΑΓ.

Άρα $t(θ)=t_1+t_2=συν\frac{θ}{2}+\frac{θ}{4}=\frac{1}{4}θ+συν\frac{θ}{2}$, $θ\in[0,π]$

Αφού:

Αν θ=0 $t(0)=t_1+t_2=\frac{1}{4}0+συν\frac{0}{2}=συν0=1$ που συμπίπτει με το $AB=v_1\cdot t\Leftrightarrow 2R=2t\Leftrightarrow t=1$

Αν θ=π $t(π)=t_1+t_2=συν\frac{π}{2}+\frac{π}{4}=\frac{π}{4}+0=\frac{π}{4}$ που συμπίπτει με το $ΑΒΓ=v_2\cdot t\Leftrightarrow πR=4t\Leftrightarrow t=\frac{π}{4}$

Γ2.

Έχουμε : $t'(\theta)=\frac{1}{4}-\eta\mu\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}$ άρα $t'(\theta)=0\Leftrightarrow\eta\mu\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu\frac{\theta}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$

X	0	π/3	π
t'(θ)	+	0	−
t(θ)	↗		↘

Άρα για θ = π/3 ο χρόνος γίνεται μέγιστος.

Γ3.

Στην περίπτωση (Ι) το σύνολο τιμών της συνάρτησης t(θ) είναι $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2})$

Στην περίπτωση (ΙΙ) t(0)=1h

Στην περίπτωση (ΙΙΙ) t(π) = π/4 h . Άρα τον ελάχιστο χρόνο τον κάνει στην περίπτωση (ΙΙΙ).

<u>ΘΕΜΑ Δ:</u>

Δ1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-\alpha x}+\alpha x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x(\sqrt{1-\frac{\alpha}{x}}+\alpha)]=\text{μορφή }(+\infty)(1+\alpha)$

Αν $1+\alpha\neq 0$ το όριο θα είναι $\pm\infty$ που είναι άτοπο, άρα α+1=0 δηλαδή α=-1.

Δ2.

Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης, η οποία αφού διέρχεται από το σημείο Μ(-1,0) γίνεται :

$$0-e^{x_0}=e^{x_0}(-1-x_0)\Leftrightarrow 0-e^{x_0}=-e^{x_0}-x_0e^{-x_0}\Leftrightarrow -1=-1-x_0\Leftrightarrow x_0=0 \text{ και } f(x_0)=e^0=1$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται: y-1=x δηλαδή y=x+1.

<u>α' τρόπος</u>

$g(x)=x+1\Leftrightarrow -x^2-x=x+1\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow(x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-1$ επομένως υπάρχει μία διπλή ρίζα άρα η ευθεία y=x+1 είναι εφαπτομένη στην γραφική παράσταση της g(x) στο σημείο (-1,0).

<u>β' τρόπος</u>

Έστω $(x_1, g(x_1))$ το σημείο επαφής και $g'(x_1)$ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης. Θα πρέπει να ισχύει : $g'(x_1)=1\Leftrightarrow -2x_1-1=1\Leftrightarrow x_1=-1$ και $g(-1)=-1+1=0$

Η εφαπτομένη της Cg στο σημείο (-1,0) είναι : $y-g(1)=g'(1)(x+1)\Leftrightarrow y=x+1$

Δ3.

$f'(x)=e^x \Leftrightarrow f''(x)=e^x>0$ άρα η f είναι κυρτή και επομένως θα ισχύει : $f(x)\geq x+1$, το= ισχύει για $x=0$

$g'(x)=-2x-1 \Leftrightarrow g''(x)=-2<0$ άρα η g είναι κοίλη και επομένως θα ισχύει :

$g(x)\leq x+1$, το= ισχύει για $x=-1$

Άρα $f(x)\geq x+1\geq g(x)$ και το = δεν ισχύει για τα ίδια x οπότε f(x)>g(x).

Δ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=(x-\kappa-1)[f(x-1)-x]+(x-\kappa)[f(x)-g(x)]$ $x\in\mathbb{R}$

- Η φ(x) συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- φ(κ+1)=f(κ+1)-g(κ+1)>0 (από Δ3)
  φ(κ)= $\kappa-f(\kappa-1)=\kappa-e^{\kappa-1}<0$ (διότι $e^{\kappa-1}>\kappa-1+1=\kappa$ από γνωστή εφαρμογή $e^x\geq x+1$)

Άρα φ(κ+1)φ(κ)<0 .

Οπότε από θεώρημα BOLZANO η εξίσωση φ(x)=0 δηλαδή η $\frac{f(x-1)-x}{x-\kappa}+\frac{f(x)-g(x)}{x-\kappa-1}=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (κ, κ+1).