ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2023

ΘΕΜΑ Α:

Α1) Σχολικό βιβλίο σελ. 111.
Α2) Σχολικό βιβλίο σελ. 104.
Α3) Σχολικό βιβλίο σελ. 128.

Α4)Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λάθος.**
α) ΛΑΘΟΣ, **β)** ΛΑΘΟΣ, **γ)** ΛΑΘΟΣ, **δ)** ΣΩΣΤΟ, **ε)** ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ Β:

Β1)

$$D_{g\circ h} = \left\{x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in (0,+\infty) \text{ και } \ln x \in \mathbb{R}\right\} = (0,+\infty)$$

και ο τύπος της (goh)(x) είναι: $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \dfrac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \dfrac{4-x^2}{x}$

Β2)

i) Για x>0 είναι : $f\,'(x) = \dfrac{-2xx-(4-x^2)}{x^2} = \dfrac{-2x^2-4+x^2}{x^2} = \dfrac{-x^2-4}{x^2} < 0 \Rightarrow f \searrow \text{ στο } (0,+\infty)$

ii) $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2} > \dfrac{\pi}{e} \overset{\cdot\left(\frac{4-e^2}{\pi}\right)<0}{\Leftrightarrow} \dfrac{4-\pi^2}{\pi} > \dfrac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} \pi > e$ που ισχύει.

Β3)

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{4-x^2}{x} \overset{\frac{4}{0^+}}{=} +\infty$ άρα η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda.$ και

  $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4-x^2+x^2}{x} \overset{\frac{4}{+\infty}}{=} 0 = \beta.$

  άρα η ευθεία y=-x είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο +∞.

B4)

Ισχύει ότι :

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| = \left|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\bullet\frac{1}{f(x)}\right| = \left|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right|\bullet\left|\frac{1}{f(x)}\right| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Rightarrow \left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\Rightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right| \le \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|.$$

και έχουμε :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right) \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0 \\ &\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right) \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$$

<u>ΘΕΜΑ Γ:</u>

Γ1) Έχουμε:

$$\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx = 1 \Rightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx = 1 \Rightarrow \left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Rightarrow \left(3+\frac{9\alpha}{2}\right)-(2+2\alpha) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Γ2)

i) Θα εξετάσουμε αν ισχύει :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to1^-}\frac{2x-3}{1} \Leftrightarrow -1 = -1 = f'(1).$$

Επομένως ορίζεται η εφαπτομένη στο 1 και έχει τύπο : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$\Rightarrow y-1 = -1(x-1) \Rightarrow y = -x+2$, (ε)

ii) $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{\varepsilon\varphi.} = -1 \Rightarrow \omega = 135^{o} = \frac{3\pi}{4}\text{rad}.$

Γ3) Για x>1 έχουμε : $f'(x) = 2x - 3 < 0$.

Για x<1 έχουμε : $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα (-∞,1) και (1,+∞) και επειδή είναι συνεχής στι 1 θα είναι γνησίως φθίνουσα στο R άρα και "1-1".

- Η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (-∞,1) οπότε :

$$f(A_1) = (f(1), \lim_{x\to-\infty} f(x)) = (1, \lim_{x\to-\infty}(x^2 - 3x + 3) = (1, +\infty)$$

- Η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο [1,+∞) οπότε :

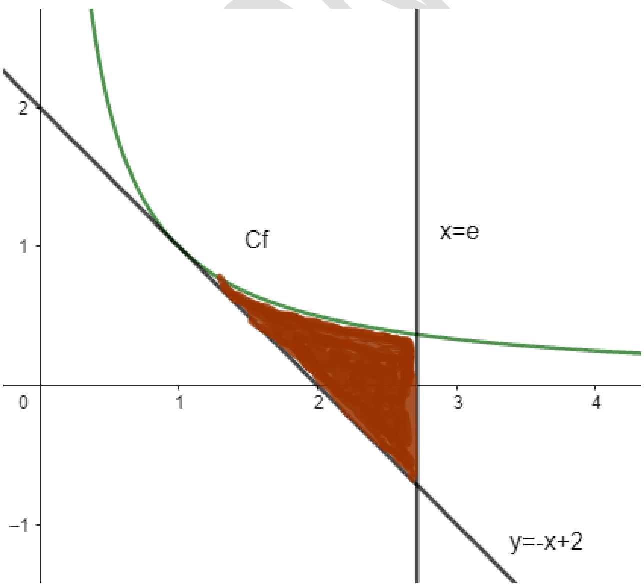
$$f(A_2) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)] = (\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}), 1] = (0, 1]$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι f(A)=(0,+∞).

Γ4)

$$E = \int_1^2 (f(x) - y)dx + \int_2^e f(x)dx = \int_1^2 (\frac{1}{x} + x - 2)dx + \int_2^e \frac{1}{x}dx =$$

$$= [\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x]_1^2 + [\ln x]_2^e = \ln 2 - 2 + \frac{3}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2} \text{τ.μ.}$$



<u>**ΘΕΜΑ Δ:**</u>

Δ1) Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}, x\neq 1$ με $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\ell$

Άρα : $f(x)=(x-1)g(x)+2x$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}((x-1)g(x)+2x)=0+2=2$

Όμως $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+\kappa)=\lim\limits_{x\to 1}(\ln(2-1)-\dfrac{1}{1}+\kappa)=-1+\kappa$

Οπότε θα ισχύει 2=-1+κ δηλαδή κ=3.

Δ2)

$$f'(x)=\frac{-1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2-x+2}{(2-x)x^2}$$

Έχουμε :

$$f'(x)=0\Rightarrow \frac{-x^2-x+2}{(2-x)x^2}=0\Rightarrow -x^2-x+2=0\Rightarrow x_1=1, x_2=-2$$

x	-∞	0 1	2	+∞
f ′(x)		+	-	
f (x)		↗	↘	

- Η f(x) είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (0,1] οπότε :

$f(A_1)=(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)]=(-\infty,2]$ διότι : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3)\overset{-\frac{1}{0^+}}{=}-\infty$.

- Η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο [1,2) οπότε :

$f(A_2)=(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x), f(1)]=(-\infty,2]$ διότι : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3)\overset{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty}{=}-\infty$..

Οπότε το $0\in f(A_1)$ και f ↗ στο $(0,1]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1):f(x_1)=0$

και επίσης

$0\in f(A_2)$ και f ↘ στο $(1,2)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in(1,2):f(x_2)=0$

1^{ος} τρόπος

Γνωρίζουμε ότι :

$x_1, \frac{1}{3} < 1$ άρα η f είναι $\nearrow$ οπότε: $f(\frac{1}{3}) = \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln\frac{5}{4} > 0 = f(x_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\frac{1}{3}) > f(x_1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3} > x_1 \Leftrightarrow x_1 < \frac{1}{3}$.

2^{ος} τρόπος

Γνωρίζουμε ότι : $f(x_1) = 0 \Rightarrow \ln(2 - x_1) - \frac{1}{x_1} + 3 = 0 \Rightarrow \ln(2 - x_1) = \frac{1}{x_1} - 3$, (1)

άρα αφού:

$$x_1 < 1 \Rightarrow -x_1 > -1 \Rightarrow 2 - x_1 > 1 \Rightarrow \ln(2 - x_1) > \ln 1 \Rightarrow \ln(2 - x_1) > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} - 3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > 3 \Rightarrow x_1 < \frac{1}{3}.$$

Δ3)

1^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $z(x) = f'(x) - \dfrac{3\ln\frac{5}{3}}{1 - 3x_1}$ και θα εφαρμόσουμε θεώρημα Bolzano

$\lim\limits_{x \to 0^+} z(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(f'(x) - \dfrac{3\ln\frac{5}{3}}{1 - 3x_1}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\dfrac{-x^2 - x + 2}{(2 - x)x^2} - \dfrac{3\ln\frac{5}{3}}{1 - 3x_1}\right) \overset{\frac{2}{0^+}}{=} +\infty > 0$ άρα υπάρχει κ>ο κοντά στο 0 τέτοιο ώστε z(κ)>0. Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στο [κ,1] στην z(x).

- Η z(x) συνεχής στο [κ , 1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $z(\kappa) > 0$

$$z(1) = f'(1) - \frac{3\ln\frac{3}{5}}{1 - 3x_1} = -\frac{3\ln\frac{3}{5}}{1 - 3x_1} < 0, \text{ διότι } x_1 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 - 3x_1 < 0$$

Οπότε $\Rightarrow z(\kappa) \cdot z(1) < 0$.

Από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\kappa, 1) \subseteq (o, 1)$ τέτοιο ώστε $z(\xi) = 0$.

Ισχύει επίσης : $z'(x) = f''(x) = -\dfrac{1}{(2 - x)^2} - \dfrac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow$ η z $\searrow$ στο $(0,1)$.

Επομένως το ξ είναι μοναδικό

2^{ος} τρόπος

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_1, \frac{1}{3}] \subseteq (0,1)$.

- Η f συνεχής στο $[x_1, \frac{1}{3}] \subseteq (0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- Η f παραγωγίσιμη στο $(x_1, \frac{1}{3})$ με $f'(x) = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2}$.

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (x_1, \frac{1}{3})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\frac{1}{3}) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \dfrac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1-3x_1}{3}} = \dfrac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$.

Ισχύει επίσης : $f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow$ η f $\searrow$ στο $(0,2)$.

Επομένως το ξ είναι μοναδικό.

Δ4)

i)

1^{ος} τρόπος

Ισχύει : $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1) = G(x_2) - G(x_1) \Rightarrow F(x_2) = -G(x_1) \Rightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0.$

2^{ος} τρόπος

Ισχύει ότι: $F'(x) = G'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + c$, (2).

Στην (2) για $x=x_1$ έχουμε: $F(x_1) = G(x_1) + c \Rightarrow 0 = G(x_1) + c \Rightarrow G(x_1) = -c$, (3).

Στην (2) για $x=x_2$ έχουμε: $F(x_2) = G(x_2) + c \Rightarrow F(x_1) = 0 + c \Rightarrow F(x_2) = c$, (4).

(3)+(4) $\Rightarrow F(x_2) + G(x_1) = c - c \Rightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0.$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $H(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$ και θα εφαρμόσουμε θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[x_1 , x_2]$.

- Η $H(x)$ συνεχής στο $[x_1 , x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $H(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=x_2G(x_1)+x_1-x_2\overset{(\Delta 4ii)}{=}$ $=-x_2F(x_2)+x_1-x_2$

$$H(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2-x_1$$

Όμως $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=F(x_2)-F(x_1)=F(x_2)$,(5).

$$\left.\begin{array}{l}\text{η } f(x)\neq 0 \text{ και συνεχής στο } (x_1,x_2) \text{ συνεπώς διατηρεί πρόσημο}\\ \text{όμως } f(1)=2>0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)>0 \text{ στο } (x_1,x_2)\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx>0\overset{(5)}{\Rightarrow} F(x_2)>0.$$

Οπότε

$$\left.\begin{array}{l}H(x_1)=-x_2F(x_2)+x_1-x_2<0 \text{ , διότι } x_1<x_2 \text{ και } x_2>0 \text{ και}\\ H(x_2)=x_1F(x_2)+x_2-x_1>0 \text{ , διότι } x_1<x_2 \text{ και } x_1>0\end{array}\right\}\Rightarrow H(x_1)H(x_2)<0.$$

Από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $H(x_0)=0$.

Επίσης :

$H'(x)=x_1f(x)+x_2f(x)+2>0$, αφού $x_1,x_2,f(x)>0$ άρα η $H(x)$ $\nearrow$ στο (x_1,x_2).

Οπότε το x_0 μοναδική λύση στο (x_1,x_2).