ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 09/09/2023

ΘΕΜΑ Α:
Α1) Σχολικό βιβλίο σελ. 135.
Α2) Σχολικό βιβλίο σελ. 162.
Α3) Σχολικό βιβλίο σελ. 142.

Α4)Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λάθος.**
α) ΣΩΣΤΟ, **β)** ΛΑΘΟΣ, **γ)** ΣΩΣΤΟ, **δ)** ΛΑΘΟΣ, **ε)** ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ Β:

Β1)

$$D_{g\circ h} = \left\{x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in (0,+\infty) \text{ και } \ln x > 0\right\} =$$
$$= \left\{x \in (0,+\infty) \text{ και } \ln x > \ln 1\right\} = (1,+\infty)$$

και ο τύπος της (goh)(x) είναι: $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{e^{\ln x}+1}{e^{\ln x}-1} = \frac{x+1}{x-1}, \mu\varepsilon\ x \in (1,+\infty)$

Β2)

Για x>1 είναι : $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow f \searrow$ στο $(1,+\infty)$ άρα και "1-1" άρα αντιστρέφεται

- Η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (1,+∞) οπότε :

$f(A) = (\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)) = (1,+\infty) = D_{f^{-1}}$ άρα το πεδίο ορισμου της αντίστροφης είναι ίδιο με το πεδίο ορισμού της f.

Στην

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και έχουμε: $x=\dfrac{f^{-1}(x)+1}{f^{-1}(x)-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} = f(x).$$

B3)

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}\overset{\frac{2}{0^+}}{=}+\infty$ άρα η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1.$

  y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

B4)

Από το σύνολο τιμών της f γνωρίζουμε ότι : $f(x)\in(1,+\infty)$ και ότι $\sigma\upsilon\nu x\le 1$

Άρα η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu x=f(x)$ δεν έχει λύσεις.

<u>ΘΕΜΑ Γ:</u>

Γ1) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=f(x)+x-2$ και θα εφαρμόσουμε θεώρημα Bolzano στο διάστημα [1, 2].

- Η φ(x) συνεχής στο [1 , 2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $\varphi(1)=f(1)-1=-1<0$

  $\varphi(2)=f(2)+2-2=2>0$

Οπότε $\left.\begin{array}{l}\varphi(1)=-1<0 \quad \kappa\alpha\iota\\ \varphi(2)=2>0\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi(1)\varphi(2)<0.$

Από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον
$x_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_1)=0\Rightarrow f(x_1)+x_1-2=0\Rightarrow f(x_1)=-x_1+2.$

Οπότε θα υπάρχει ένα κοινό σημείο της Cf με την ευθεία y=-x+2.

ii) Έστω $(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής $f'(x_0)=1\Leftrightarrow f'(x_0)=f'(2)\Rightarrow x_0=2.$
διότι η f'(x) είναι "1-1" αφού είναι γνησίως αύξουσα (f''(x)<0).

Η εφαπτομένη στο (2, f(2)) είναι : $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y-2=1(x-2)\Rightarrow y=x$

Άρα η ευθεία y=x εφάπτεται στην Cf.

Γ2) Ξέρουμε ότι :

$$f''(x)<0 \Rightarrow f' \searrow \text{ και } f'(2)=1.$$

$$\text{Για } x\in[1,2] \Rightarrow f'(x)>f'(2)=1>0 \Rightarrow f \nearrow \text{ άρα και "1-1".}$$

Η f(x) είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο [1,2] οπότε :

$f(A)=[f(1),f(2)]=[0,2]=D_{f^{-1}}$ άρα το πεδίο ορισμου της αντίστροφης είναι το [0,2].

Γ3) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f(x) στα διαστήματα [1,x], [x,2].

- Η f συνεχής στα [1,x], [x,2]. ως παραγωγίσιμη.
- Η f παραγωγίσιμη στα [1,x], [x,2].

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)}{x-1}$.

και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(x,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}=\dfrac{2-f(x)}{2-x}$.

$$\xi_1<\xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\xi_1)<f(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-1}<\frac{2-f(x)}{2-x}.$$

Γ4)

i) Από ερώτημα Γ3)

$$\frac{f(x)}{x-1}<\frac{2-f(x)}{2-x} \overset{\bullet(x-1)(2-x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)(2-x)>(x-1)(2-f(x)) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x)(2-x+x-1)>2(x-1) \Leftrightarrow f(x)>2x-2$. Για x=1 και x=2 ισχύει το ίσον . Άρα $f(x)\geq 2x-2$ για κάθε $x\in[1,2]$.

ii) Επειδή η f είναι κοίλη θα ισχύει : $f(x)\leq x$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Άρα ισχύει η σχέση :

$$2x-2\leq f(x)\leq x \;\Rightarrow \int_1^2 (2x-2)dx \leq \int_1^2 f(x)dx \leq \int_1^2 x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x^2-2x]_1^2 \leq \int_1^2 f(x)dx \leq [\frac{x^2}{2}]_1^2 \Rightarrow 1<\int_1^2 f(x)dx<\frac{3}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1) Η εφαπτομένη στο σημείο x_1 και έχει τύπο : $y-f(x_1)=f'(x_1)(x_1-1)$ και περνάει από την αρχή των αξόνων οπότε θα ισχύει:

$$0-e^{x_1}=e^{x_1}(0-x_1)\Rightarrow -e^{x_1}=-x_1e^{x_1}\Rightarrow x_1=1.$$

Άρα η εφαπτομένη γίνεται: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow$

$$\Rightarrow y-e=e(x-1)\Rightarrow y=ex$$

Δ2) Επειδή η e^x είναι κυρτή δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την y=ex, άρα θα δείξουμε ότι η $y=e^x$ και η $f(x)=-e^{-x}+2$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

$$f(x)=y\Rightarrow -e^{-x}+2=ex\Rightarrow e^{-x}+ex-2=0 \overset{\text{θεωρώ } \varphi(x)=e^{-x}+ex-2}{\Leftrightarrow} \varphi(x)=0$$

$$\text{Άρα } \varphi'(x)=0\Rightarrow x=-1 \text{ και } \varphi''(x)=e^{-x}>0 \text{ άρα } \varphi'(x)\nearrow \text{ οπότε η λύση } x=-1 \text{ μοναδική.}$$

Για την φ(x) ισχύει το πινακάκι

x		-∞	-1	0	+∞
φ'(x)		-		+	
φ(x)		↘		↗	

Αφού για $x<-1\overset{\varphi'\nearrow}{\Leftrightarrow}\varphi'(x)<\varphi'(-1)=0.$

Βρίσκω το σύνολο τιμών της φ(x).

- Η φ(x) είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (-∞, -1] οπότε :

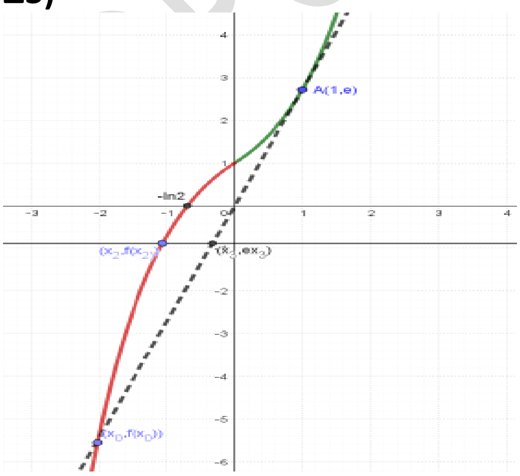
$$\varphi(A_1)=[\varphi(-1),\lim_{x\to-\infty}\varphi(x))=[-2,\lim_{x\to-\infty}[x(\frac{e^{-x}}{x}+e-\frac{2}{x})=[-2,+\infty)$$

- Η φ(x) είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο [-1,0] οπότε :

$$\varphi(A_2)=[f(-1),\varphi(0)]=[-2,-1]$$

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-\infty,-1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0.$

Δ3)



$$E=\int_{x_0}^{0}(-e^{-x}+2-ex)dx+\int_{0}^{1}(e^{x}-ex)dx=[e^{-x}+2x-\frac{ex^2}{2}]_{x_0}^{0}+[e^{x}-\frac{ex^2}{2}]_{0}^{1}=$$

$$=1-(e^{-x_0}+2x_0-\frac{ex_0^{\ 2}}{2})+e-\frac{e}{2}-(1-0)=1-e^{-x_0}-2x_0+\frac{ex_0^{\ 2}}{2}+\frac{e}{2}-1=$$

$$=-e^{-x_0}-2x_0+\frac{ex_0^{\ 2}}{2}+\frac{e}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Δ4)

Έστω (x_1,κ) το κινητό της ευθείας y=ex και (x_2,κ) το κινητό της Cf με

$x_1>x_2,\kappa\le 0$ άρα ισχύουν :$\kappa=ex_1\Rightarrow x_1=\frac{\kappa}{e}$

και $\kappa=-e^{-x_1}+2\Rightarrow x_1=-\ln(2-\kappa)$ άρα $d(\kappa)=x_1-x_2=\frac{\kappa}{e}+\ln(2-\kappa)$

Θεωρώ τη συνάρτηση $d(x)=\frac{x}{e}+\ln(2-x)$ με $d'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{2-x}=0$

$\Rightarrow 2-x=e\Rightarrow x=2-e$ και $d''(x)=-\frac{1}{(2-x)^2}<0$ άρα $d'(x)\searrow$

x	-∞	ex_0	2-e 0	+∞
d ′(x)		+	-	
d (x)		↗	↘	

Άρα η μέγιστη δυνατή απόσταση είναι : $d(2-e)=\frac{2-e}{e}+\ln(e)=\frac{2}{e}-1+1=\frac{2}{e}$