ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2024

ΘΕΜΑ Α:

Α1) Σχολικό βιβλίο σελ. 76.
Α2) Σχολικό βιβλίο σελ. 155.
Α3) Σχολικό βιβλίο σελ. 216.

Α4)Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λάθος.**
α) ΣΩΣΤΟ, **β)** ΣΩΣΤΟ, **γ)** ΛΑΘΟΣ, **δ)** ΛΑΘΟΣ, **ε)** ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ Β:

Β1)

- $$D_f = \{x \in D_g \cap D_h \text{ και } h(x) \neq 0\} = \left\{x \geq 1 \text{ και } \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0\right\} =$$
$$= \left\{x \geq 1 \text{ και } \sqrt{x} \neq \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0\right\} = \{x \geq 1 \text{ και } x \neq 1\} = (1, +\infty)$$

Τύπος: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{x+1}{x-1}.$

- $D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$

Τύπος: $r(x) = g(x) \cdot h(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) = \sqrt{x}^2 - (\frac{1}{\sqrt{x}})^2 = x - \frac{1}{x}.$

B2)

$$f'(x)=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}<0 \Rightarrow f \searrow \text{ στο } (1,+\infty)$$

άρα και '1 − 1' οπότε αντιστρέφεται.

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}=y \Leftrightarrow x+1=yx-y \Leftrightarrow (1-y)x=-y-1 \Leftrightarrow x=\frac{y+1}{y-1}, y\neq 1$$

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$ οπότε :

$f(A)=(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x))=(1,+\infty)$ διότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι $f(A)=(1,+\infty)=D_{f^{-1}}$.

B3)

- Η r(x) δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες γιατί ορίζεται στο $[1,+\infty)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{r(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{1}{x^2})=1=\lambda.$ και

$$\lim_{x\to+\infty}(r(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}(r(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}\overset{\frac{-1}{+\infty}}{=}0=\beta.$$

άρα η ευθεία y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4)

$$(f^{-1}(f(x))^2=1-4r(x)\overset{x>1}{\Leftrightarrow} x^2=1+4x-\frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3=x+4x^2-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0 \Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } \underbrace{x=1 \text{ ή } x=-1}_{\text{απορρίπτονται λόγω περιορισμού}}.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ Α-ΞΙΩΤΗ

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1) Έχουμε: f(x) συνεχής στο R άρα και στο 2 οπότε θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+}(-x^2+4x-3-\lambda) = \lim_{x\to 2^-}(-2x+4+e^{\lambda}) = f(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\lambda = e^{\lambda}$$

το ίσον ισχύει μόνο για λ=0 αφού ισχύει η γνωστή ανισοϊσότητα $e^x \geq x+1$

Γ2)

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & ,0 \leq x < 2 \\ -2x+4 & ,x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1'(x) = -2 < 0 \text{ άρα η } f_1(x) \searrow \text{ για } 0 \leq x < 2 \\ f_2'(x) = \underbrace{-2x+4}_{\text{γιατί } x>2} < 0 \text{ άρα η } f_2(x) \searrow \text{ για } x > 2 \end{array}\right\} \text{οπότε αφού η } f(x) \text{ συνεχής στο } 2$$

θα είναι $\searrow$ στο $[0,+\infty)$.

Και το f(0)=0 θα είναι ολικό μέγιστο.

Γ3)i)

- Ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο [0,3]
- Θα εξετάσουμε αν είναι και παραγωγίσιμη το [0,3] δηλαδή στο 2 που χωρίζεται ο κλάδος.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{-2x+4}{1} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2}{1} \Leftrightarrow 0 = -2.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2 οπότε δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0,3].

ii)

Η εφαπτομένη στο ξ έχει τύπο : $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ (ε)

$$\lambda_{\Delta E} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

θα εξετάσουμε αν υπάρχει ξ στο (0,3) για το οποίο να ισχύει f'(ξ)=-5/3 αφού $\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\Delta E}$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΞΙΩΤΗ

$$\text{Αν } \xi \in [0,2) \text{ τότε }: -2 = -\frac{5}{3}, \text{ άτοπο}$$

$$\text{Αν } \xi \in (2,+\infty) \text{ τότε }: -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -6\xi + 12 = -5 \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6} \in (0,3)$$

Άρα θα υπάρχει εφαπτομένη στο Γ(ξ,f(ξ)) που να είναι παράλληλη στην ευθεία ΔΕ.

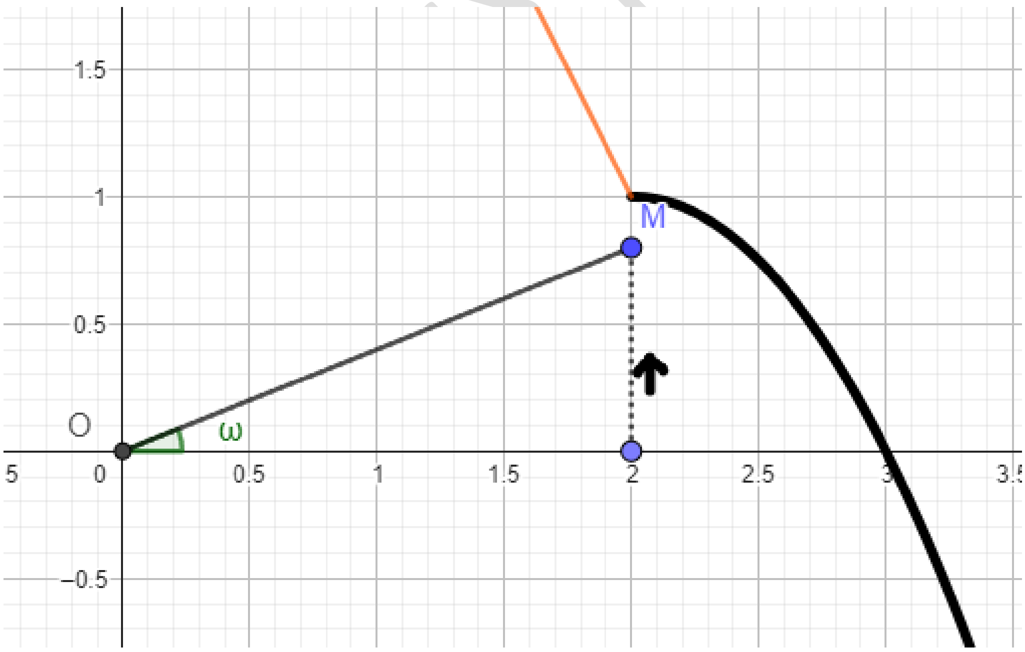
Γ4) Το σημείο Μ(x(t),y(t))=M(2,y(t)) κινείται κατακόρυφα στην ευθεία χ=2 με ταχύτητα Ο,5 μ/sec άρα y'(t)=0,5 μ/sec.

Το σημείο Μ συναντάει την Cf όταν x=2 άρα το $y(t_0)=1$ αφού f(2)=1.

Στο τρίγωνο ΟΑΜ θα ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{y(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))}\omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow (1 + \varepsilon\varphi^2(\omega(t)))\omega'(t) = \frac{0,5}{2} \overset{t=t_0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (1 + \frac{1}{4})\omega'(t_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ rad/sec}.$$



ΣΤΗΡΙΑ ΑΞΙΩΤΗ

<u>ΘΕΜΑ Δ:</u>

Δ1)

Η f(x) είναι παραγωγίσιμη για x>0 και έχουμε:

$$f'(x)=\frac{(\ln x+\alpha x)'x-(\ln x+\alpha x)x'}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Έχουμε :

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow x=e.$$

x	-∞	0	e	+∞
f ′(x)		+	-	
f (x)		↗	↘	

Η f(x) έχει ολικό μέγιστο το $f(e)=\dfrac{1+\alpha e}{e}$ όμως από το σύνολο τιμών που μας δόθηκε το μέγιστο είναι : $1+\dfrac{1}{e}=\dfrac{e+1}{e}$ άρα $f(e)=\dfrac{e+1}{e}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha e+1}{e}=\dfrac{e+1}{e}\Leftrightarrow\alpha=1$

Δ2)

Η f(x) είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (0,e] οπότε αν υπάρχει ρίζα στο (1/2 ,1) θα είναι μοναδική

Θα εφαρμόσω θεώρημα bolzano στην f(x) στο [1/2,1]

Η f(x) συνεχής στο [1/2,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{2})=-2\ln 2+1<0 \\ f(1)=1>0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(1)f(\frac{1}{2})<0$$

άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\frac{1}{2},1):f(x_0)=0$

που είναι μοναδικό λόγω μονοτονίας,

Η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο [1,+ ∞) οπότε :

$$f(A_2)=(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(e)]=(\lim_{x\to+\infty}f(x),1+\frac{1}{e}]=(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+1,1+\frac{1}{e}]=$$

$$\underset{LDH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}(\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}+1,1+\frac{1}{e}]=(1,1+\frac{1}{e}]$$

$0\notin f(A_2)$ άρα δεν υπάρχει ρίζα της f(x)=0 στο [e,+ ∞)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΞΙΩΤΗ

Δ3) i)

Για x>e η f(x) είναι γνησίως αύξουσα άρα και “1-1” οπότε η f(x)=f(4) θα έχει μοναδική λύση την x=4.

Για x<e η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα άρα και “1-1” οπότε η f(x)=f(4)=f(2) θα έχει μοναδική λύση την x=2.

Αφού: $f(4)=\dfrac{\ln 4+4}{4}=\dfrac{2\ln 2+4}{4}=\dfrac{\ln 2+2}{2}=f(2)$.

ii)

Για x>e

$$2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}+1 \le \frac{\ln x}{x}+1 \Leftrightarrow f(2)\le f(x) \Leftrightarrow f(4)\le f(x) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} 4 \ge x \Leftrightarrow e < x \le 4$$

Για $0<x \le e: 2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \Leftrightarrow \dfrac{\ln 2}{2} \le \dfrac{\ln x}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}+1 \le \frac{\ln x}{x}+1 \Leftrightarrow f(2)\le f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 2 \le x \le e$$

Τελικά η ανίσωση αληθεύει για τα x που ανήκουν στο [2,4].

Δ4)

Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\frac{1-x}{e^x}\right|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\right|\frac{1-x}{e^x}dx \text{ αφού } 1\text{-}x>0 \text{ και } e^x>0$$

για $x\in[-\ln 2,0]$

$e^x=u$ οπότε έχουμε: για $x=-\ln 2$ το $u=\dfrac{1}{2}$ και για $x=0$ το $u=1$

Θέτουμε

$e^x dx=du \Rightarrow dx=\dfrac{1}{u}du$

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΞΙΩΤΗ

$$E(\Omega)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)|\frac{1-\ln u}{u^2}du=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}-f(u)f'(u)du+\int_{x_0}^{1}f(u)f'(u)du=$$

$$=[\frac{-f^2(u)}{2}]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+[\frac{f^2(u)}{2}]_{x_0}^{1}=\frac{-f^2(x_0)}{2}-\frac{-f^2(\frac{1}{2})}{2}+\frac{f^2(1)}{2}-\frac{f^2(x_0)}{2}=$$

$$=\frac{(-2\ln 2+1)^2+1}{2}=2\ln^2 2-2\ln 2+1 \quad \text{τ.μ.}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΞΙΩΤΗ