ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2024 ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΘΕΜΑ Α:

Α1) Σχολικό βιβλίο σελ. 105.
Α2) Σχολικό βιβλίο σελ. 31.
Α3) Σχολικό βιβλίο σελ. 77.

Α4)Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λάθος.**
α) ΣΩΣΤΟ, **β)** ΛΑΘΟΣ, **γ)** ΣΩΣΤΟ, **δ)** ΣΩΣΤΟ, **ε)** ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ Β:

Β1)

- $D_h = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_g\} = \{x \in R \text{ και } X - 2 > 0\} = \{x \in R \text{ και } X > 2\} = $
$= (2, +\infty)$

Τύπος: $h\,(x) = f\big(g(x)\big) = 2\ln(x-2) - 1.$

Β2)

Η $h'(x) = (2\ln(x-2) - 1)' = \frac{2}{\chi - 2} \Rightarrow h''(x) = \left(\frac{2}{\chi-2}\right)' = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0.$

άρα η συνάρτηση h είναι κοίλη στο $(2, +\infty)$.

Β3) Αφού η h'(x)>0 για x>2 η h(x) είναι γνησίως αύξουσα, άρα '1-1' άρα αντιστρέφεται.

Η h(x) είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (2, +∞) άρα το σύνολο τιμών της είναι :

$$h(A) = \left(\lim_{x\to 2^+} h(x), \lim_{x\to +\infty} h(x)\right) = (-\infty, +\infty) = D_{f^{-1}}$$

$h(x) = y \Leftrightarrow 2\ln(x-2) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow x - 2 = e^{\frac{y+1}{2}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{y+1}{2}} + 2$

Άρα $h^{-1}(x) = e^{\frac{x+1}{2}} + 2, x \in R.$

Β4)

Η ϕ(x) είναι συνεχής στο [-1,2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (-1,2) με

$$\phi\,'(x) = \left(e^{\frac{x+1}{2}} - 1\right)'(x^3 - 8) + \left(e^{\frac{x+1}{2}} - 1\right)(x^3 - 8)' =$$

$$= \frac{e^{\frac{x+1}{2}}}{2}\ (x^3 - 8) + 3x^2\left(e^{\frac{x+1}{2}} - 1\right)$$

Είναι ϕ(-1)=$(h^{-1}(-1) - 3)[(-1)^3 - 8] = -9(3 - 3) = 0.$

ϕ(2)=$(h^{-1}(2) - 3)[(2)^3 - 8] = 0$

δηλαδή ϕ(-1)=ϕ(2)

άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [-1,2]

<u>ΘΕΜΑ Γ:</u>

Γ1) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής άρα :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-}(e^{x+1} - \lambda x) = \frac{-a + a}{-1 + a} \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Γ2) Η f είναι παραγωγίσιμη άρα:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to -1^+}\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{x+1} + x}{x + 1} = \lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{ax + a}{x + a}}{x + 1} \Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{x+1} + x}{x + 1}$$
$$= \lim_{x\to -1^+}\frac{a}{x + a} \Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{x+1} + 1}{1} = \lim_{x\to -1^+}\frac{a}{x + a} \Leftrightarrow 2 = \frac{a}{a - 1} \Leftrightarrow a = 2$$

Άρα

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \mathrm{x} & , x < -1 \\ \dfrac{2(x + 1)}{x + 2} & , x \geq -1 \end{cases}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(-1,0) είναι :

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = 2(x+1) \Leftrightarrow y = 2x+2$$

Αφού $f'(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\frac{2x+2}{x+2}}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+2} = 2$

Γ3) Επειδή η f είναι συνεχής στο R δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες :

Ακόμα : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+2}{x+2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

Άρα η y=2 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο + ∞ και

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x+1}+x}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x+1}+1}{1} = 1 = \lambda \quad ,$$

$$\lim_{x\to -\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to -\infty} (e^{x+1}+x-x) = \lim_{x\to -\infty} e^{x+1} = 0 = \beta.$$

Επομένως η πλάγια ασύμπτωτη στο - ∞ είναι η y=x.

Γ4) Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, -1]$ αφού $f'(x) = e^{x+1}+1 \Rightarrow f''(x) = e^{x+1} > 0.$
και η y=2x+2 εφαπτομένη στο -1 άρα ισχύει η ανισότητα :

$$f(x) \geq 2x+2 \text{ για } x = \eta\mu\upsilon - 2 \leq -1 \text{ η ανισοϊσότητα γίνεται:}$$

$f(\eta\mu\upsilon - 2) \geq 2(\eta\mu\upsilon - 2) + 2 \Leftrightarrow f(\eta\mu\upsilon - 2) \geq 2\eta\mu\upsilon - 2$, για κάθε $x \in R$.

<u>ΘΕΜΑ Δ:</u>

Δ1) i) $|g(x)-g(y)| \leq (x-y)^2$ θέτουμε όπου y τυχαίο σημείο $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ και παίρνουμε :

$$|g(x)-g(x_0)| \leq (x-x_0)^2 \Leftrightarrow \left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \leq |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0| \leq \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \leq |x-x_0|$$

Με

$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |x-x_0| = \lim_{x\to x_0} (-|x-x_0|) = 0$ άρα $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = 0$ άρα $g'(x) = 0$

για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε αφού η g συνεχής θα είναι $g(x) = c.$ (σταθερή).

ii)

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \eta\mu \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \text{ άρα } g(x) = 1 \text{ οπότε : } f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Δ2)

$$f'(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} < 0 \ \sigma\tau o \ \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \ \acute{\alpha}\rho\alpha \ \eta \ f \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma \ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha \ \sigma\tau o \ \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \ \acute{\alpha}\rho\alpha \ \kappa\alpha\iota \ \text{1-1}$$

$$o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \ \tau o \ \sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o \ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu \ \tau\eta\varsigma \ \theta\alpha \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota : f(A) = [f\left(\frac{\pi}{2}\right), \lim_{x\to 0^+} f(x)) = [1, +\infty)$$

Δ3) $f^{-1}(\sqrt{2}) = f^{-1}\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x) = (f(\alpha) - 2)(x - \sqrt{2}) + \left(f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}\right)(x - \frac{\pi}{4})$

Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) : \varphi(x_0) = 0.$

Θα εφαρμόσω θεώρημα bolzano στην φ(x) στο $\left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right]$.

Η φ(x) συνεχής στο $[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = (f(\alpha) - 2)\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right) > 0, \delta\iota\acute{o}\tau\iota \ \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu\alpha} < 2 \Leftrightarrow \varphi(\alpha) - 2 < 0$$

$$\varphi(\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\varphi(\sqrt{2}) < 0$$

άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) : \varphi(x_0) = 0$
που είναι μοναδικό λόγω μονοτονίας, αφού:

$\varphi'(x) = (f(\alpha) - 2) - \frac{\pi}{12} < 0$ οπότε φ(x) γνησίως φθίνουσα.

Δ4) i) Η συνάρτηση H(x) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right] \mu\varepsilon$

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}\right) = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} = h(x)$$

Άρα η H(x) είναι μία παράγουσα της h(x) στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii) Επειδή $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ το εμβαδόν θα δίνεται από τον τύπο :

$$E(\Omega) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |2 - f(x)| dx$$

Για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] : \frac{\pi}{6} \leq x \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) \geq f(x) \Leftrightarrow 2 - f(x) \geq 0.$

Οπότε $E(\Omega) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - f(x))dx = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\eta\mu x}\right) dx = \left(\frac{2\pi}{3}\right) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2\, x}\right) dx = \left(\frac{2\pi}{3}\right) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2\, x}\right) dx = \left(\frac{2\pi}{3}\right) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (h(x))dx = \left(\frac{2\pi}{3}\right) - H(x)_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \left(H\left(\frac{\pi}{2}\right) - H\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2\pi}{3} - 0 + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3}) \ \ \tau.\mu.$