



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2025

ΘΕΜΑ Α:

A1) Σχολικό βιβλίο σελ. 186.

A2) Σχολικό βιβλίο σελ. 76.

A3) Σχολικό βιβλίο σελ. 161.

A4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λάθος**.

α) ΣΩΣΤΟ, β) ΣΩΣΤΟ, γ) ΛΑΘΟΣ, δ) ΛΑΘΟΣ, ε) ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ Β:

B1)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο \mathbb{R} και παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό της σημείο με $x=1$, άρα από το θεώρημα FERMAT θα ισχύει :

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -6$$

B2)

Οπότε για $a=-6$ η συνάρτηση f γίνεται: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ή } x_2 = 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$		↗	↘	↗

Βρίσκω τα σύνολα τιμών σε κάθε διάστημα. Για το πρώτο διάστημα εξετάζω μόνο τις θετικές τιμές στο $[0,1]$

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,1]$ οπότε :

$$f(A_1) = [f(0), f(1)] = [-3, 1]$$

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[1,3]$ οπότε :

$$f(A_2) = [f(1), f(3)] = [-3, 1]$$

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[3,+\infty]$ οπότε :

$$f(A_3) = [3, +\infty) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty) \text{ διότι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Το 0 ανήκει σε όλα τα σύνολα τιμών οπότε η εξίσωση έχει τρεις ακριβώς λύσεις αφού σε κάθε σύνολο η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

B3)

$$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$			-		+
f(x)			∩		∪

Οπότε η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$, κυρτή στο $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x=2$ το $A(2, f(2))$, $A(2, -1)$

B4)

Οι εξισώσεις των δύο εφαπτομένων είναι:

$$\varepsilon_f: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$$

$$\varepsilon_g: y - (\xi + f(\xi)) = (f'(\xi) + 1)(x - \xi) \Rightarrow y = (f'(\xi) + 1)(x - \xi) + f(\xi) + \xi$$

Για να τέμνονται τις εξισώνουμε για να βρούμε το σημείο τομής:

$$f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) = (f'(\xi) + 1)(x - \xi) + f(\xi) + \xi \Rightarrow$$

$$f'(\xi)(x - \xi) = (f'(\xi) + 1)(x - \xi) + \xi \Rightarrow$$

$$f'(\xi)x - f'(\xi)\xi = f'(\xi)x - f'(\xi)\xi + x - \xi + \xi \Rightarrow x = 0$$

Άρα τέμνονται πάνω στον άξονα γ'γ.

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \lim_{x \rightarrow 0^-} \eta\mu x = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \right\} \text{άρα η } f \text{ είναι συνεχής}$$

στο 0 αφού:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = +\infty \end{aligned}$$

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού το αποτέλεσμα δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Γ2)

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty \text{ άρα δεν έχει οριζόντια στο } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x = 0 \text{ λόγω του κριτηρίου παρεμβολής αφού:}$$

$$|e^{x\eta\mu x}| \leq e^x \Rightarrow -e^x \leq e^{x\eta\mu x} \leq e^x$$

$$\text{και αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{άρα από κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=0$ στο $-\infty$.

Θα εξετάσουμε αν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1 \right)} = \frac{1}{2} = \beta$$

Άρα η ευθεία $y=x+1/2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Γ3)

Για να βρω τα σημεία τομής της C_f με την ασύμπτωτη αρκεί να λύσω την εξίσωση :

$$f(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Θεωρώ τη συνάρτηση: } g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = e^{x \eta \mu x} - x - \frac{1}{2}$$

και θα εφαρμόσω το Θεώρημα Bolzano στην $g(x)$ στο διάστημα $[-\pi, 0]$ που είναι συνεχής ως πράξις συνεχών, αφού είναι συνεχής και η f .

$$g(-\pi) = \pi - 1/2 > 0 \text{ και } g(0) = -1/2 < 0 \text{ άρα } g(-\pi) g(0) < 0$$

άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-\pi, 0) : g(x_0) = 0$
επομένως η Cf τέμνει σε ένα τουλάχιστον σημείο την πλάγια ασύμπτωτη.

Γ4)

Για

$t \geq 0$ έχουμε : $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ και $x'(t) > 0$

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει να ισχύει : } y'(t) = x'(t) &\Rightarrow \frac{2x'(t)x(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x'(t)(2x(t) + 1)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \Rightarrow 2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2x(t) + 1)^2 = \left(2\sqrt{x^2(t) + x(t)}\right)^2 \Rightarrow 4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4x^2(t) + 4x(t) \\ &\Rightarrow 0 = 1 \text{ άτοπο.} \end{aligned}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοια χρονική στιγμή ώστε να ισχύει $x'(t) = y'(t)$.

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1)

Η $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

και παραγωγίσιμη ομοίως οπότε για να δείξω ότι είναι σταθερή αρκεί να δείξω ότι η $g'(x) = 0$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x)x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - \frac{xf(x)}{2\ln x}(e^{(\ln x)^2})2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \\ &= \frac{f(x)x^{\ln x} - f(x)x^{\ln x}}{(x^{\ln x})^2} = 0 \end{aligned}$$

Άρα η $g(x)$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$

Δ2)

i)

Αφού η εφαπτομένη στο Μ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) $y=2x$ θα ισχύει $f'(1)=2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} =$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\stackrel{DLH}{=} f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 1 = 2$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1} (x f'(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x \cdot \frac{2f(x) \ln x + 2 \frac{F(x)}{x} - f(x)}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(2f(x) \ln x + 2 \frac{F(x)}{x} - f(x) \right) = 2f(1) \ln 1 + 2F(1) - f(1) =$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2F(1) - 0 = 2F(1) \text{ όμως από Δi το όριο είναι } 2.$$

$$\text{Άρα } F(1) = 1$$

Επίσης από Δ1:

$$g(x) = c \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Rightarrow \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = c \Rightarrow c = 1$$

$$\text{άρα } \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Rightarrow F(x) = x^{\ln x}$$

Δ3)

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ οπότε έχουμε:

$$F'(x) = (e^{(\ln x)^2})' = e^{(\ln x)^2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow F'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

Η $F(x)$ έχει είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και έχει ολικό ελάχιστο στο 1 το $F(1)=1$.

Για $x=1$ η εξίσωση έχει λύση αφού $F(1)-F(1)=-(-1-1)^2$ αφού $0=0$.

Για $x > 1$ ισχύει : $x^2 > x \xrightarrow{F \text{ γνησίως αύξουσα}} F(x^2) > F(x)$
 $\Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Rightarrow -(x-1)^2 > \text{αδύνατο}.$

Για $0 < x < 1$ ισχύει : $x^2 < x \xrightarrow{F \text{ γνησίως φθίνουσα}} F(x^2) > F(x)$
 $\Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Rightarrow -(x-1)^2 > \text{αδύνατο}.$

Άρα μοναδική λύση της εξίσωσης είναι το $x=1$.

Δ4)

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^e |F(x)| dx, \text{ όμως } F(x) \geq F(1) > 0 \text{ άρα } E = \int_1^e F(x) dx$$

Από την βασική ανισότητα που ισχύει για κάθε x που ανήκει στους πραγματικούς αριθμούς έχουμε:

$$e^x \geq x + 1 \Rightarrow e^{(\ln x)^2} \geq (\ln x)^2 + 1 \Rightarrow F(x) \geq (\ln x)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\int_1^e F(x) dx > \int_1^e ((\ln x)^2 + 1) dx \Rightarrow$$

$$\int_1^e F(x) dx > \int_1^e ((\ln x)^2) dx + \int_1^e (1) dx \Rightarrow$$

$$\int_1^e F(x) dx > \int_1^e ((x)' (\ln x)^2) dx + [x]_1^e \Rightarrow$$

$$\int_1^e F(x) dx > [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e \left(x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \right) dx + e - 1 \Rightarrow$$

$$\int_1^e F(x) dx > e - 0 - 2 \int_1^e (\ln x) dx + e - 1 \Rightarrow$$

$$\int_1^e F(x) dx > e - 2[x \ln x - x]_1^e + e - 1 \Rightarrow$$

$$\int_1^e F(x) dx > e - 2(0 + 1) + e - 1 \Rightarrow \int_1^e F(x) dx > 2e - 3$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ Α.Λ.Ω.Τ.Η.