# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2026

## ΘΕΜΑ Α:

**Α1) Σχολικό βιβλίο σελ. 133.**
**Α2) Σχολικό βιβλίο σελ. 51.**
**Α3) Σχολικό βιβλίο σελ. 185.**

**Α4)** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λάθος.**
**α)** ΛΑΘΟΣ, **β)** ΣΩΣΤΟ, **γ)** ΣΩΣΤΟ, **δ)** ΣΩΣΤΟ, **ε)** ΛΑΘΟΣ.

## ΘΕΜΑ Β:

**Β1)**

$$Dh=\{x\geq 2\ /\ \sqrt{x-2}+1>1\}=\{x\geq 2\ /\ \sqrt{x-2}>0\}=(2,+\infty)$$

**και**

$$h(x)=h(f(x))=2\ln\left(\sqrt{x-2}\right)=\ln\left(\sqrt{x-2}\right)^2=\ln(x-2)$$

**Β2)**

**α' τρόπος**

$$h(x)=\ln(x-2)\Rightarrow y=\ln(x-2)\ \textit{θέτουμε όπου } y \textit{ το } x \textit{ και όπου } x \textit{ το } y$$

*και παίρνουμε* :

$$x=\ln(y-2)\Rightarrow e^x=y-2\Rightarrow y=e^x+2\ \mu\varepsilon\ x\in\mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα } h^{-1}(x)=e^x+2\ \mu\varepsilon\ x\in\mathbb{R}.$$

**β' τρόπος**

$$h'(x)=(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}>0\Rightarrow h\ \textit{γνησίως αύξουσα οπότε το σύνολο τιμών}$$

$$\textit{της είναι το}\left(\lim_{x\to 2}h(x),\ \lim_{x\to+\infty}h(x),\right)=(-\infty,+\infty)\ \textit{που είναι το πεδίο ορισμού}$$

*της αντίστροφης* .

$$\textit{Θέτουμε όπου } x \textit{ το } h^{-1}(x)\ \textit{και παίρνουμε}\ :$$

$$x=\ln\left(h^{-1}(x)-2\right)\Rightarrow e^x=h^{-1}(x)-2\Rightarrow h^{-1}(x)=e^x+2\ \mu\varepsilon\ x\in\mathbb{R}.$$

**B3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x-2)\,2\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}\right)=-\infty\cdot 2\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=-\infty\cdot 2=-\infty$

## <u>ΘΕΜΑ Γ:</u>

**Γ1)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{k.x^3}{x^2}=k(+\infty)$$

*για να είναι το όριο πραγματικός αριθμός πρέπει* $\kappa=0$, *αλλιώς το όριο θα ήταν* $\pm\infty$ .

$$f'(0)=1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\kappa x^2+\mu}{x^2+1}=\mu$$

**Γ2) i)**

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ *με* $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow x=\pm 1$

| x | -∞ | -1 | 1 +∞ |
|---|---|---|---|
| f ΄(x) | - | + | - |
| f (x) | ↘ | ↗ | ↘ |

*Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μαρουσιάζει ακρότατα στο* $-1$ *και* $1$ *τα :*

$f(-1)=-\dfrac{1}{2}$ *τοπικό ελάχιστο και* $f(1)=\dfrac{1}{2}$ *τοπικό μέγιστο.*

**ii)**

*Επειδή τα όρια στα άκρα είναι :* $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{\chi\to-\infty} f(x)=0$

*το σύνολο τιμών θα είναι:* $f(A)=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

**iii)**

$$\text{Το } a^2+\frac{1}{2}\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \text{ μόνο αν είναι ίσο με } \frac{1}{2} \text{ άρα θα πρέπει:}$$

$$a^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=0 \text{ για την οποία έχει μόνο μία ρίζα.}$$

**Γ3**

**i)**

$$I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{2\nu+1}\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1=\frac{1}{2\nu+2}.$$

**ii)**

$$I_0=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$$

$$I_0+I_1=\frac{1}{2}\Rightarrow \ln\sqrt{2}+I_1=\frac{1}{2}\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}$$

$$I_1+I_2=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}+I_2=\frac{1}{4}\Rightarrow I_2=-\frac{1}{4}+\ln\sqrt{2}$$

## **ΘΕΜΑ Δ:**

**Δ1)**

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)+x,\ x\in[-1,0]$

- Η φ(x) συνεχής στο [-1,0] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- φ(-1)=g(-1)-1<0, φ(0)=g(0)+0=g(0)>0 γιατί g(x)>0

Οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_1\in(-1,0)$ *τέτοιος ώστε* $\varphi\left(x_1\right)=0\Rightarrow g\left(x_1\right)+x_1=0$

Η h(x) είναι παραγωγίσιμη στο (-1,0) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων
με : $\varphi'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$

Έστω ότι η εξίσωση φ(x)=0 έχει δύο ρίζες τις
*τις* $x_1$ *και* $x_1$ *με* $x_1 < x_2$ *και αφού η* $\varphi(x)$

*είναι παραγωγίσιμη στο* $\left[x_1, x_2\right]$ *θα είναι και συνεχής στο* $\left(x_1, x_2\right)$

*οπότε από το θεώρημα Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi \in \left(x_1, x_2\right)$

*τέτοιο ώστε* $\varphi'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) = -1$ *που είναι άτοπο.*

*Άρα η λύση* $x_1$ *μοναδική.*

**Δ2)**

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 οπότε θα ισχύει η σχέση:

$$\lim_{\chi \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\chi \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\text{Άρα} \lim_{\chi \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\chi \to 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{\chi \to 0^-} \left(xg(x) + x^2\right) = 0$$

$$\text{και} \lim_{\chi \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\chi \to 0^-} \frac{2\eta\mu z x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{\chi \to 0^-} \left(\frac{2\eta\mu z x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa\right) =$$

$$= 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa. \text{ Άρα } 3 - \kappa = 0 \Rightarrow \kappa = 3$$

**Δ3)**

**i)**

$$f(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x,\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\mu\varepsilon$$

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3\Rightarrow f''(x)=-2\eta\mu x+\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$=2\eta\mu x\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1\right)>0\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \eta\mu x>0\ \ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu^2 x<1\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>1$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha\ f'(x)\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha.$

$\Gamma\iota\alpha\ x>0\Rightarrow f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0\ \ \acute{\alpha}\rho\alpha\ f\ \ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \gamma\iota\alpha\ x\geq 0$

Άρα η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα.

Οπότε : $\gamma\iota\alpha\ x\geq 0\Rightarrow f(x)\geq f(0)=0$

**ii)**

$\eta\ f\ \ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ [0,\ \pi/2)\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o\ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu\ \tau o:$

$$f(A)=[f(0),\ \pi/2)=[0,\ \lim_{\chi\to\frac{\pi}{2}}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x))=\ [0,\ +\infty)$$

$\tau o\ \dfrac{\pi}{3}\in\ [0,\ +\infty)=f(A)\ \ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \theta\alpha\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu\ x_2\in[0,\ \pi/2)$

$\tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f\left(x_2\right)=\dfrac{\pi}{3},\ \pi o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{o}\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \eta\ f\ \ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha.$

**Δ4)i)**

*Η συνάρτηση* $h(x)=g(x)+x,\ x\in\left[x_1,0\right]$, *είναι παραγωγίσιμη με* $h'(x)=g'(x)+1$, *που είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός οπότε διατηρεί πρόσημο στο* $\left(x_1,0\right)$.

*Αν* $h'(x)<0$ *η* $h(x)$ *είναι γνησίως φθίνουσα άρα για* $x_1<0\Rightarrow h\left(x_1\right)<h(0)\Rightarrow 0>g(0)$ *άτοπο*.

*Άρα* $h'(x)>0$ *δηλαδή η* $h(x)$ *γνησίως αύξουσα, άρα για* $x\geq x_1\Rightarrow h(x)\geq h\left(x_1\right)\Rightarrow g(x)+x\geq 0$.

*Επομένως η* $f(x)=x^2h(x)\geq 0$ *στο διάστημα* $\left[x_1,0\right]$.

**ii)**

$$E_1=\int_{\chi_1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x\ ,\ E_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ με } E_1=E_2$$

$$E_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)\,\mathrm{d}x=\left[-2\sigma\upsilon\nu x-\ln(\sigma\upsilon\nu x)-\frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}$$

$$E_1=\int_{\chi_1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\chi_1}^{0} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\chi_1}^{0} x^3\mathrm{d}x=\int_{\chi_1}^{0}\left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)\,\mathrm{d}x+\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}g(x)\right]_{x_1}^{0}-\int_{\chi_1}^{0}\frac{x^3}{3}g'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{x_1{}^4}{4}=$$

$$=-\frac{x_1{}^3}{3}g\left(x_1\right)-\frac{1}{3}\int_{\chi_1}^{0}\frac{x^3}{3}g'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{x_1{}^4}{4}=$$

$$=\frac{x_1{}^3}{3}-\frac{x_1{}^4}{4}-\frac{1}{3}\int_{\chi_1}^{0}\frac{x^3}{3}g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Όμως πρέπει* $E_1=E_2\Rightarrow 1+\ln 2-\dfrac{\pi^2}{6}=\dfrac{x_1{}^3}{3}-\dfrac{x_1{}^4}{4}-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{\chi_1}^{0}\frac{x^3}{3}g'(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_{\chi_1}^{0}\frac{x^3}{3}g'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x_1{}^4}{4}+\frac{\pi^2}{2}-3\ln 2-3$$