ΘΕΜΑ A

A_1 Σχολικό σελ 133

A_2 Σχολικό σελ 51

A_3 Σχολικό σελ 185

A_4 α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

Θέμα Β

B_1 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\ln(\sqrt{x-2}+1-1)=2\ln(\sqrt{x-2})$

$=\ln(\sqrt{x-2})^2=\ln(x-2)$

$D_{f\circ g}=\{x\in D_g \text{ και } g(x)\in D_f\}=\{x\geq 2 \text{ και } \underbrace{\sqrt{x-2}+1>1}_{\sqrt{x-2}>0 \Rightarrow x\neq 2}\}=$

$=(2,+\infty)$

B_2 $h'(x)=\dfrac{1}{x-2}>0$ για $x>2$ Άρα $h\nearrow$ άρα 1-1

οπότε αντιστρέφεται

$y=\ln(x-2)\Rightarrow e^y=x-2\Rightarrow x=e^y+2$

$h^{-1}(x)=e^x+2$

$D_{h^{-1}(x)}=h(A)\overset{h\nearrow(2,+\infty)}{=\!=\!=}\left(\lim\limits_{x\to 2^+}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)$

$=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

B_3 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\underset{\downarrow \, -\infty}{\ln(x-2)}\cdot\underset{\downarrow}{\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2}}\right)\overset{-\infty\cdot 2}{=\!=\!=}-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\frac{1}{x-1}}{1}=2$

Θέμα Γ

Γ1 $\qquad f(x)=\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$

i) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2}\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \kappa\cdot(+\infty)\in\mathbb{R}$

μόνο για $\kappa=0$.

ii • $f'(0)=1 \qquad f(0)=0$

$$f'(x)=\frac{(3\kappa x^2+\mu)(x^2+1)-(\kappa x^3+\mu x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \overset{x=0}{\Rightarrow}$$

$$f'(0)=\frac{\mu}{1} \Rightarrow \mu=1$$

Γ2. i) $\quad f'(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{1(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

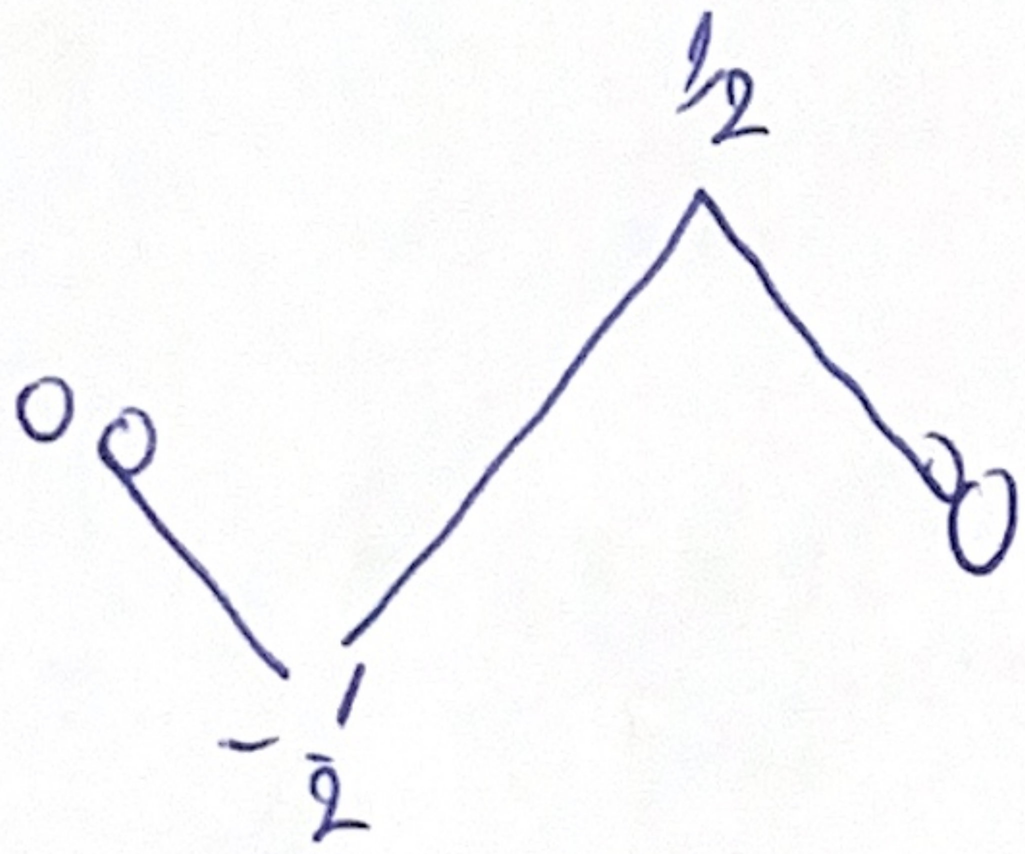
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim \frac{x}{x^2}=0$

$f(-1)=-\frac{1}{2}$ $\;\downarrow\;$ ολικό ελάχιστο, $\quad f(1)=\frac{1}{2}$ $\;\downarrow\;$ ολικό μέγιστο

(ii) $f(A) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3)$

$\downarrow$

$\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$



Αν $\frac{1}{2}+\alpha^2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ δύο λύσεις

Αν $\frac{1}{2}+\alpha^2 = 0$ μία λύση. Αδύνατη

Αν $\frac{1}{2}+\alpha^2 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ δύο λύσεις αδύνατο

$\underbrace{0 < \frac{1}{2}+\alpha^2}_{\text{ισχύει πάντα}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}+\alpha^2 \leq \cancel{\frac{1}{2}} \Rightarrow \overset{\text{για}}{\alpha = 0}$

$\downarrow$

η $f(x) = \frac{1}{2}+\alpha^2$

έχει μία λύση.

Γ3

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx$$

(i) ΝΔΟ $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} =$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}}\,dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\nu+2}$$

ii)
$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^3+x-x}{x^2+1}dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^5+x^3-x^3}{x^2+1}dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}} - \frac{x^3}{x^2+1}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

Θεμα Δ

Δ1 $h(x)=g(x)+x$ Bolzano στο $[-1,0]$

h συνεχής στο $[-1,0]$ ως π.σ.σ.

$h(-1)=g(-1)-1<0$
$h(0)=g(0)>0$ } $h(-1)\cdot h(0)<0$

Άρα ∃ ένα τουλ. $x_1\in(-1,0)$: $h(x_1)=0$

$g(x_1)+x_1=0$

$h'(x)=g'(x)+1\neq 0$
$h'(x)$ συνεχής } η $h'(x)$ διατηρεί πρόσημο

Άρα $h(x)$ γνησίως μονότονη

Άρα η λύση μοναδική

Άρα $h(0)=g(0)+0>0$ η $h(x)>0$ στο $(x_1,0)$

Δ2

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(g(x)+x)-}{\cancel{x}}$$

$2\cdot1+1-\kappa=0 \Rightarrow \kappa=3$

Δ_3 i) στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$ με

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \geq 0$$

κ f συνεχής και $\nearrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(A) = \left[f(0), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right)$

$= [0, +\infty)$

Αρα $f(x) \geq 0$

ii) το $3f(x) = \pi \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$

το $\frac{\pi}{3} \in f(A)$ Αρα $\exists\, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) : f(x_2) = \frac{\pi}{3}$

που είναι μοναδικό αφου $f \nearrow$

Δ_4 i) κ $h(x) = g(x) + x$, $x \in [x_1, 0]$ παρ/μη

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ } $h'(x)$ διατηρεί πρόσημο

$h'(x)$ συνεχής

Αν $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow \Rightarrow$ για $x_1 < 0 \Rightarrow h(x_1) > h(0)$

$0 > h(0)$

Ατοπο

Αρα $h'(x) > 0$ δηλ $h \nearrow$ για $x > x_1 \Rightarrow h(x) > h(x_1) = 0$

$f(x) = x^2 \cdot h(x) \geq 0$ $\forall x \in [x_1, 0]$

Δ_4 ii)

Θα ισχύει:

$$E_1 = E_2 \qquad f(x) \geq 0 \text{ Από } \Delta_3 i), \Delta_4 i)$$

$$\int_{x_1}^{0} |f(x)|dx = \int_{0}^{f(x_2)} |f(x)|dx \Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^2(g(x)+x)dx = \int_{0}^{\pi/3} (2\eta\mu x + \epsilon\varphi x - 3x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)'(g(x)+x)dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln\sigma\upsilon\nu x - 3\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/3}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}(g(x)+x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}(g'(x)+1)dx = \cancel{-2\cdot\frac{1}{2}} - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{12} + 2$$

$$0 - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 dx = -\ln 2^{-1} - \frac{\pi^2}{12} + 1 \overset{\cdot(-3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = -3\ln 2 + \frac{\pi^2}{4} - 3$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{4} - 3\ln 2 - 3$$